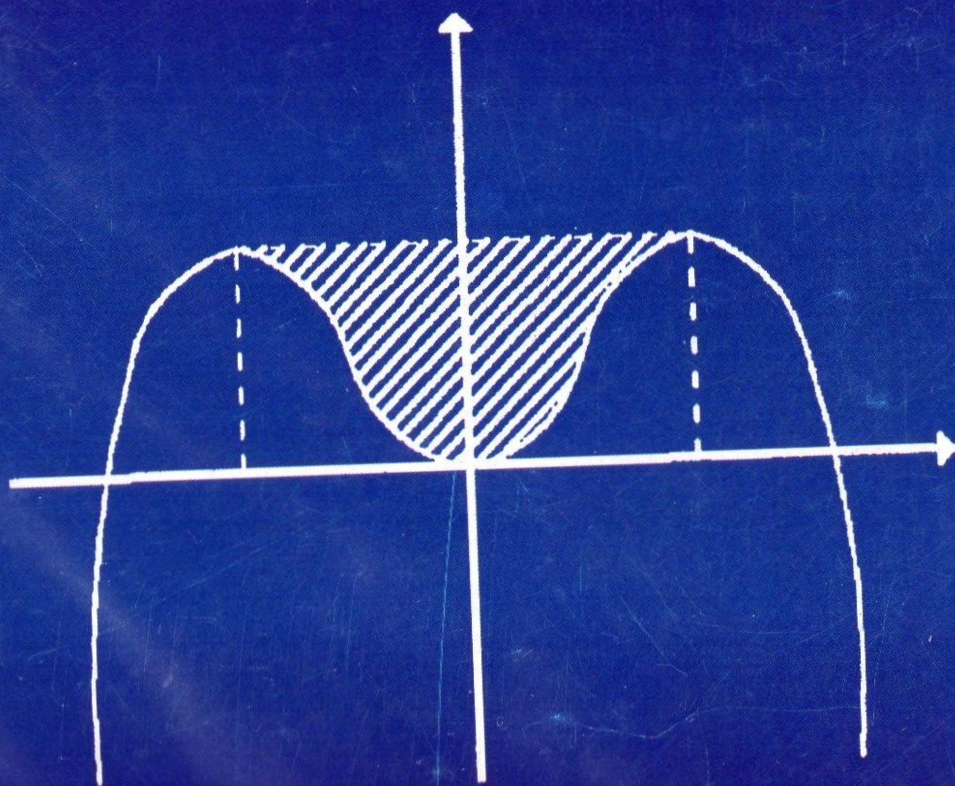
Alejandro E. García Venturini
Mónica Scardigli

ANALISIS MATEMATICO I

para estudiantes de Ingeniería



COLECCIÓN: EL NÚMERO DE ORO



Análisis Matemático I

para estudiantes de Ingeniería

COLECCIÓN: EL NÚMERO DE ORO
DIRECTOR: Act. Alberto Landro

Álgebra para estudiantes de Ciencias Económicas
Alejandro E. García Venturini – Axel Kicillof

Análisis Matemático I para estudiantes de Ciencias Económicas
Alejandro E. García Venturini – Axel Kicillof

Análisis Matemático II para estudiantes de Ciencias Económicas
Alejandro E. García Venturini – Axel Kicillof

Los matemáticos que hicieron la historia
Alejandro E. García Venturini

Análisis de Series de Tiempo, univariadas y multivariadas
Heriberto Urbisaia – Juana Brufman

Decisión Estadística Bayesiana, a modo de introducción
Emma Fernández Loureiro de Pérez

Estadística no Paramétrica, a modo de introducción
Emma Fernández Loureiro de Pérez

Teoría de los Conjuntos Borrosos, a modo de introducción
Emma Fernández Loureiro de Pérez

Estadística: Herramientas de Inferencia
Gabriela Kurincic

Estadística: Probabilidades y Distribuciones
Gabriela Kurincic

Los Métodos Cuantitativos en las Ciencias Sociales
Alejandro E. García Venturini – Federico Castelli

Aplicaciones del Análisis Matemático a la Economía
Blanca R. Vitale

Modelos para el Análisis de Series de Tiempo
Juan Carlos Abril

Análisis Matemático I para estudiantes de Ingeniería
Alejandro E. García Venturini – Mónica Scardigli

Cálculo Financiero
Juan R. Garnica Hervás - Esteban O. Thomasz - Romina P. Garófalo

Elementos de Econometría de los fenómenos dinámicos
Alberto H. Landro – Mirta L. González

Acerca de la probabilidad
Alberto H. Landro

Alejandro E. García Venturini – Mónica Scardigli

Análisis Matemático I

para estudiantes de Ingeniería



Ediciones Cooperativas es un emprendimiento cooperativo de docentes de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires para difundir sus trabajos e investigaciones



García Venturini, Alejandro Ezequiel
Análisis Matemático I: para estudiantes de ingeniería / Alejandro Ezequiel García Venturini y Mónica Scardigli - 5a ed. - Buenos Aires: Ediciones Cooperativas, 2012.
520 p.; 21x14 cm.

ISBN 978-987-1246-29-8

1. Análisis Matemático I. I. Scardigli, Mónica. II Título
CDD 515

Tucumán 3227 (1189)
Buenos Aires – Argentina
☎ (54 011) 3528-0466 / (15) 4937 6915
http://www.edicionescoop.org.ar
info@edicionescoop.org.ar

1º edición, Agosto 2006
2º edición, Marzo 2007
3º edición, Noviembre 2009
4º edición, Marzo 2011
5º edición, Marzo 2012

Hecho el depósito que establece la ley 11.723

Impreso y encuadernado por:
Imprenta Dorrego. Dorrego 1102, C.A.B.A.
5ª. ed. Tirada: 400 ejemplares. Se terminó de imprimir en Marzo 2012.

IMPRESO EN ARGENTINA – PRINTED IN ARGENTINA

Editorial asociada a:



Capítulo 1

Nociones previas

Los conjuntos numéricos.

Conjunto de números reales.

Cotas.

Extremos.

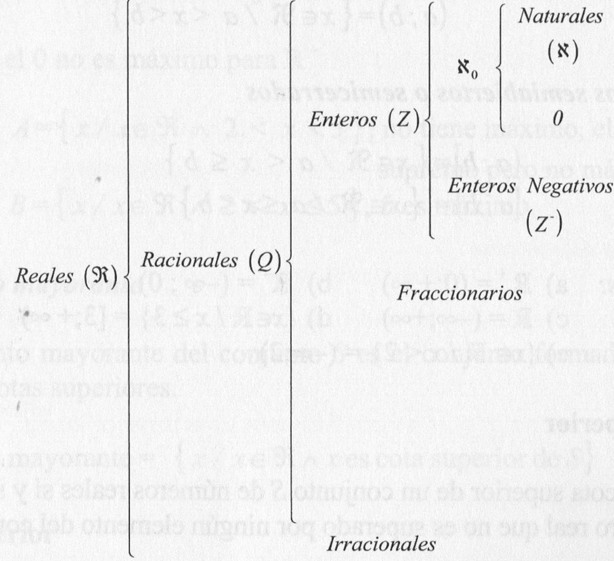
Valor absoluto.

Elementos de la teoría de conjuntos de puntos.

Nociones previas

Los Conjuntos Numéricos

Recordemos los conjuntos numéricos



Ahora vamos a estudiar en particular algunas características de los números reales.

Conjuntos de Números Reales

Intervalos

***Intervalo real cerrado* [a;b]**

Es el conjunto de números reales formado por los números mayores o iguales que a y menores o iguales que b.

$$[a;b]=\{x\in\Re \ / \ a\le x\le b\}$$

Longitud del intervalo: $b-a$

Intervalo real abierto (a;b)

Es el conjunto de números reales formado por los números mayores que a y menores que b.

$$(a;b)=\{x\in\Re \ / \ a<x<b\}$$

Intervalos semiabiertos o semicerrados

$$(a;b]=\{x\in\Re \ / \ a<x\le b\}$$
$$[a;b)=\{x\in\Re \ / \ a\le x<b\}$$

Ejemplos: a) $\mathbb{R}^+=(0;+\infty)$ b) $\mathbb{R}^-=(-\infty;0)$
c) $\mathbb{R}=(-\infty;+\infty)$ d) $\{x\in\mathbb{R} \ / \ x\ge 3\}=[3;+\infty)$
e) $\{x\in\mathbb{R} \ / \ x<2\}=(-\infty;2)$

Cota superior

k es una cota superior de un conjunto S de números reales sí y sólo si k es un número real que no es superado por ningún elemento del conjunto S.

$$k \text{ es cota superior de } S \Leftrightarrow \forall x\in S: x\le k$$

Un conjunto está ***acotado superiormente*** sí y sólo si tiene cota superior.

Ejemplo: $\mathbb{R}^-$ está acotado superiormente, tiene infinitas cotas superiores (0, 1, 2, etc.).

Extremo superior o supremo

Es la menor de las cotas superiores.

s es supremo $\Leftrightarrow$ s es cota superior y $\forall$ k que es cota superior: $s\le k$

Ejemplo: el 0 para $\mathbb{R}^-$

Nota: el extremo superior o supremo es único.

Máximo: si el extremo superior o supremo pertenece al conjunto S entonces es el **máximo** del conjunto.

Ejemplo: el 0 no es máximo para $\mathbb{R}^-$

$A=\{x \ / \ x\in\Re \wedge 2<x<5\}$, no tiene máximo, el 5 es supremo pero no máximo

$B=\{x \ / \ x\in\Re \wedge 2<x\le 5\}$, 5 es máximo

Conjunto mayorante

El conjunto mayorante del conjunto S es el conjunto formado por todas sus cotas superiores.

Conjunto mayorante = $\{x \ / \ x\in\Re \wedge x \text{ es cota superior de } S\}$

Cota inferior

h es una cota inferior de un conjunto S de números reales sí y sólo si h es un número real que no supera a ningún elemento del conjunto S.

$$h \text{ es cota inferior de } S \Leftrightarrow \forall x\in S: x\ge h$$

Ejemplo: el 0, –1, –2, etc. para $\mathbb{R}^+$

Un conjunto está ***acotado inferiormente*** $\Leftrightarrow$ tiene cota inferior.

Extremo inferior o ínfimo

Es la mayor de las cotas inferiores.

s es ínfimo $\Leftrightarrow$ s es cota inferior y $\forall h$ que es cota inferior: $s \geq h$

Ejemplo: el 0 para $\mathbb{R}^+$

Nota: el extremo inferior o ínfimo es único.

Mínimo: si el extremo inferior o ínfimo pertenece al conjunto S entonces es el **mínimo** del conjunto.

Ejemplos.: el 0 no es mínimo para $\mathbb{R}^+$

$A=\{x \,/\, x\in \Re \wedge 2 < x < 5\}$ no tiene mínimo

$B=\{x \,/\, x\in \Re \wedge 2 \leq x < 5\}$ 2 es mínimo

Conjunto minorante

El conjunto minorante del conjunto S es el conjunto formado por todas sus cotas inferiores.

Conjunto minorante = $\{x \,/\, x\in \Re \wedge x$ es cota inferior de $S\}$

Conjunto acotado

Un conjunto está acotado sí y sólo sí tiene cota superior e inferior, es decir si admite conjunto mayorante y conjunto minorante.

Ejemplo: $A=\{x \,/ x\in \Re \wedge 2\leq x<7\}$

Conjunto mayorante = $\{x \,/ x\in \Re \wedge x\geq 7\}$, 7 es el supremo, no tiene máximo.

Conjunto minorate = $\{x \,/ x\in \Re \wedge x\leq 2\}$, 2 es el ínfimo, y mínimo.

A es un conjunto acotado.

Axioma de continuidad

Caracteriza a los números reales. Si un conjunto no vacío de números reales tiene cota superior entonces tiene extremo superior o supremo.

No es así en Q donde la cota superior puede no pertenecer al conjunto.

Ejemplo: $A=\{x \,/ x\in Q \wedge x^2<2\}$ $\sqrt{2}\notin Q$

VALOR ABSOLUTO -MÓDULO

Se llama valor absoluto o módulo de un número real al mismo número si es positivo o cero y a su opuesto si es negativo.

$$|a|=\begin{cases} a & si\, a\geq 0 \\ -a & si\, a<0 \end{cases}$$

Ejemplos: $|3|=3$ $\quad |-4|=4$ $\quad |0|=0$

Propiedades

1) $\forall a\in \Re : (a\neq 0 \Rightarrow |a|>0)$
2) $\forall a\in \Re : |a|=|-a|$
3) $\forall a\in \Re : |a|=k \Leftrightarrow a=k \vee a=-k$
4) $\forall a\in \Re : -|a|\leq a\leq |a|$
5) $\forall a\in \Re, \forall b\in \Re : |a.b|=|a|.|b|$
6) $\forall a\in \Re, \forall b\in \Re : |a:b|=|a|:|b|$
7) $\forall k>0,\ \forall x\in \Re : (|x|\leq k \Leftrightarrow -k\leq x\leq k)$
8) $\forall k>0,\ \forall x\in \Re : (|x|\geq k \Leftrightarrow x\geq k \vee x\leq -k)$
9) $\forall a\in \Re, \forall b\in \Re : |a+b|\leq |a|+|b|$ (desigualdad triangular)
10) $\forall a\in \Re, \forall b\in \Re : |a-b|\geq \big||a|-|b|\big|$
11) $\forall a\in \Re, \forall b\in \Re : |a|-|b|\leq |a-b|$

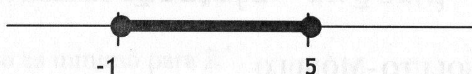
Ejemplos de aplicación de las propiedades

Resolver las siguientes inecuaciones y determinar el conjunto solución

a) $|x-2|\leq 3$

$-3\leq x-2\leq 3 \Rightarrow -3+2\leq x\leq 3+2 \Rightarrow -1\leq x\leq 5$

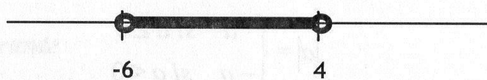
$x\in[-1;5]$. $S=[-1;5]$



b) $|x+1|<5$

$-5<x+1<5 \Rightarrow -5-1<x<5-1 \Rightarrow -6<x<4,\ x\in(-6;4)$

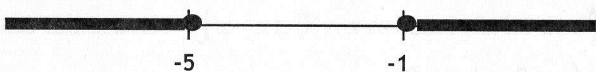
$S=(-6;4)$



c) $|x+3|\geq 2$

$x+3\geq 2 \vee x+3\leq -2 \Rightarrow x\geq -1 \vee x\leq -5$

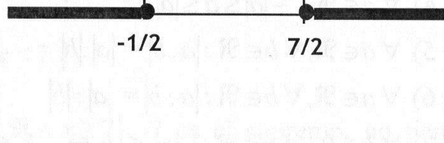
$x\in(-\infty;-5]\cup[-1;+\infty)$. $S=(-\infty;-5]\cup[-1;+\infty)$



d) $|-2x+3|\geq 4$

$-2x+3\geq 4 \vee -2x+3\leq -4 \Rightarrow x\geq \dfrac{7}{2} \vee x\leq -\dfrac{1}{2}$ ∴

$x\in\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right]\cup\left[\dfrac{7}{2};+\infty\right)$



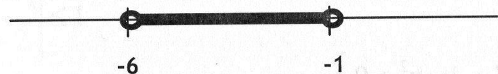
$S=\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right]\cup\left[\dfrac{7}{2};+\infty\right)$

e) $|x|<6<|5-x|$

$|x|<6 \Leftrightarrow -6<x<6$

$|5-x|>6 \Leftrightarrow 5-x>6 \vee 5-x<-6 \Rightarrow x>11 \vee x<-1$

El conjunto solución está formando por los números reales que verifican todas las condiciones, es decir $(-6;-1)$. $S=(-6;-1)$



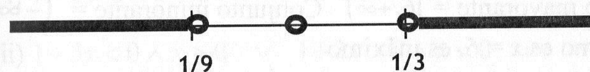
f) $\left|6-\dfrac{1}{x}\right|>3 \Leftrightarrow 6-\dfrac{1}{x}>3 \vee 6-\dfrac{1}{x}<-3 \Rightarrow$

$\dfrac{6x-1}{x}>3 \vee \dfrac{6x-1}{x}<-3 \Rightarrow \dfrac{3x-1}{x}>0 \vee \dfrac{9x-1}{x}<0$

i) $x>\dfrac{1}{3} \wedge x>0 \vee x<\dfrac{1}{3} \wedge x<0 \Rightarrow x>\dfrac{1}{3} \vee x<0$

ii) $x>\dfrac{1}{9} \wedge x<0 \vee x<\dfrac{1}{9} \wedge x>0 \Rightarrow 0<x<\dfrac{1}{9}$

$x\in\left(-\infty;\dfrac{1}{9}\right)\cup\left(\dfrac{1}{3};+\infty\right)-\{0\}$. $S=\left(-\infty;\dfrac{1}{9}\right)\cup\left(\dfrac{1}{3};+\infty\right)-\{0\}$



Ejercicio integrador

Resolver $|2x+1|\leq 3$. Determinar cotas del conjunto *S*.

$-3\leq 2x+1\leq 3 \Rightarrow -4\leq 2x\leq 2 \Rightarrow -2\leq x\leq 1$. $S=[-2;1]$

Conjunto mayorante: $[1;+\infty)$, supremo = 1, máximo = 1

Conjunto minorante: $(-\infty;-2]$, ínfimo = −2, mínimo = −2

EJERCICIOS GENERALES RESUELTOS

1) Hallar los conjuntos mayorante y minorante, cotas y extremos, máximo y mínimo.

a) $A=\{x / x\in\Re \wedge 1-x^2>0\}$

$1-x^2>0 \;\Rightarrow\; x^2<1 \quad \therefore \quad |x|<1 \;\Leftrightarrow\; -1<x<1$

$A=(-1;1)$

Conjunto mayorante = $[1;+\infty)$ Conjunto minorante = $(-\infty;-1]$

El supremo es $x = 1$, no es máximo

El ínfimo es $x = -1$, no es mínimo

b) $B=\left\{x\in\Re / x=\frac{1}{n}\ con\ n\in\aleph\right\}$

Conjunto mayorante = $[1;+\infty)$ Conjunto minorante = $(-\infty;0]$

El supremo es $x = 1$, es máximo

El ínfimo es $x = 0$, no es mínimo

c) $C=\{x / x\in\Re \wedge x=1 \vee 4<x\le 6\}$

Conjunto mayorante = $[6;+\infty)$ Conjunto minorante = $(-\infty;1]$

El supremo es $x = 6$, es máximo

El ínfimo es $x = 1$, es mínimo

d) $D=\{x / x\in\Re \wedge |x-3|\le 5\}$

$-5\le x-3\le 5 \;\Leftrightarrow\; -2\le x\le 8$

Conjunto mayorante = $[8;+\infty)$ Conjunto minorante = $(-\infty;-2]$

El supremo es $x = 8$, es máximo

El ínfimo es $x = -2$, es mínimo

2) Determinar el conjunto de todos los números reales tales que su distancia al origen de coordenadas sea igual a 4.

$|x-0|=4 \;\Leftrightarrow\; x=-4 \;\vee\; x=4 \;\therefore\; S=\{-4;4\}$

3) Resolver las siguientes desigualdades. Indicar conjuntos mayorante y minorante, cotas y extremos, máximo y mínimo del conjunto solución.

a) $\left|\frac{x+1}{-2}\right|\le 1$

$-1\le\frac{x+1}{-2}\le 1 \;\Leftrightarrow -2\le x+1\le 2 \;\Leftrightarrow -3\le x\le 1 \;\therefore S=[-3;1]$

Conjunto mayorante = $[1;+\infty)$ Conjunto minorante = $(-\infty;-3]$

El supremo es $x = 1$, es máximo

El ínfimo es $x = -3$, es mínimo

b) $\left|\frac{1}{x}+1\right|>2$

$\frac{1}{x}+1>2 \;\vee\; \frac{1}{x}+1<-2 \quad\Rightarrow\quad \frac{1-x}{x}>0 \;\vee\; \frac{1+3x}{x}<0$

i) $1-x>0\wedge x>0 \;\vee\; 1-x<0\wedge x<0 \;\Rightarrow\; 0<x<1$

ii) $1+3x<0\wedge x>0 \;\vee\; 1+3x>0\wedge x<0 \;\Rightarrow\; -\frac{1}{3}<x<0$

$\therefore\; S=\left(-\frac{1}{3};0\right)\cup(0;1)$

Conjunto mayorante = $[1;+\infty)$ Conjunto minorante = $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right]$

El supremo es $x = 1$, no es máximo

El ínfimo es $x=-\frac{1}{3}$, no es mínimo

ELEMENTOS DE LA TEORÍA DE CONJUNTO DE PUNTOS

Entorno de un punto

Si a es un número real cualquiera y h un número positivo se llama ***entorno de centro a y radio h*** al conjunto de puntos que están a una distancia de $\boldsymbol{a}$ mayor o igual a 0 y menor que $\boldsymbol{h}$, es decir al intervalo abierto $(a-h\,;\,a+h)$.

$$E(a\,;h)=(a-h\,;a+h)=\{x\,/\,a-h<x<a+h\}=\{x\,/\,0\leq|x-a|<h\}$$

Entorno reducido

Es el entorno del cual se excluye al centro, es decir al punto a:

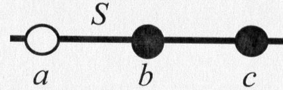
$$E^*(a;h)=E(a\,;h)-\{a\}=\{x\,/\,0<|x-a|<h\}$$

Ejemplos

$E(2;0{,}05)=(1{,}95;2{,}05)$ $\qquad E^*(2;0{,}05)=(1{,}95;2{,}05)-\{2\}$

Punto de acumulación

Si S es un conjunto de puntos de la recta real, un punto x es de acumulación de S sí y sólo sí a todo entorno reducido de centro x pertenece por lo menos un elemento de S.



Si $S=(a;b]$, a y b son de acumulación, c no lo es.

x es un punto de acumulación de $S \Leftrightarrow \forall E^*(x)\,/\,E^*(x)\cap S\neq\phi$

Conjunto derivado

Dado un conjunto de puntos S, el conjunto formado por todos sus puntos de acumulación se denomina conjunto derivado (S').

En un intervalo real cerrado todos los puntos son de acumulación.

En un intervalo real abierto o semiabierto todos los puntos son de acumulación, aunque los extremos no pertenezcan al conjunto.

Si $S=[a;b]$, $S'=[a;b]$, $S=(a;b)$, $S'=[a;b]$, $S=[a;b)$, $S'=[a;b]$

En el conjunto de los números naturales no hay puntos de acumulación.

Ejemplo: $\quad A=\{x\,/\,x\in\Re\wedge|2-4x|\leq 2\vee x=5\}$

$-2\leq 2-4x\leq 2 \;\Rightarrow\; -4\leq -4x\leq 0$ (recordemos que al dividir por un número negativo cambia el sentido de la desigualdad)

Por lo tanto $0\leq x\leq 1 \vee x=5$. Resulta así $A=[0;1]\cup\{5\}$ y $A'=[0;1]$

Conjunto denso en sí

Un conjunto es denso en sí si todos sus puntos son de acumulación. Por lo tanto debe estar incluido en el conjunto derivado. $S\subseteq S'$.

Ejemplos: $\mathbb{R}$, un intervalo cerrado o un intervalo abierto son conjuntos densos en sí porque todos sus puntos son de acumulación.

El conjunto A recién mencionado no es denso en sí.

Conjunto cerrado

Un conjunto es cerrado sí y solo sí contiene a todos sus puntos de acumulación.

Ejemplo: un intervalo cerrado es un conjunto cerrado porque contiene a todos sus puntos de acumulación en cambio un intervalo abierto no lo es porque los extremos son de acumulación y el conjunto no los contiene.

Conjunto compacto

Un conjunto es compacto sí y solo sí es cerrado y acotado.

Ejemplo: un intervalo cerrado.

Conjunto perfecto

Un conjunto es perfecto si es cerrado y denso en sí. Es decir si es igual a su conjunto derivado. $S = S'$.

Ejemplo: $\mathbb{R}$ y un intervalo cerrado son conjuntos perfectos. $\mathbb{Q}$ no es perfecto porque es denso en sí pero no es cerrado.

Punto adherente

Si S es un conjunto de puntos de la recta real, un punto x es adherente de S sí y sólo sí a todo entorno de centro x pertenece por lo menos un elemento de S.

x es un punto adherente a $S \Leftrightarrow \forall x \in S \wedge \exists E(x) / E(x) \cap S \neq \phi$.

Hay que observar que si un punto pertenece al conjunto S, aunque éste sea aislado, es un punto adherente. Nótese la diferencia con los puntos de acumulación.

Adherencia de un conjunto

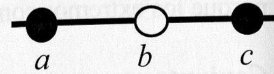
La adherencia de un conjunto S, se designa como $\overline{S}$, y es el conjunto formado por todos los puntos adherentes a S.

Punto aislado

Un punto x que pertenece a un conjunto S es aislado si y sólo sí existe un entorno reducido x en el cual no hay ningún punto del conjunto S.

x es aislado $\Leftrightarrow$ $x \in S \wedge \exists E^*(x) / E^*(x) \cap S = \phi$

Si $S = [a;b) \cup \{c\}$, c es aislado.



Es un punto que pertenece al conjunto S y no es de acumulación.

Ejemplo: cada número natural y cada número entero son puntos aislados.

Punto interior

Un punto x es interior al conjunto S si y sólo si existe un entorno de x totalmente incluido en S. x es interior $\Leftrightarrow$ $\exists E(x) / E(x) \subseteq S$. x debe pertenecer al conjunto S.

Si $S = [a;b]$, c es interior. Designamos al conjunto de puntos interiores como $S_i = \{x / x$ es punto interior de $S\}$.



Ejemplos: a) Todo número real b) en $S = [0;2)$, $x = 1$

Conjunto abierto

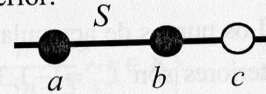
Un conjunto es abierto si todos sus puntos son interiores.

Ejemplos: $\mathbb{R}$ y los intervalos abiertos son conjuntos abiertos; no los son los intervalos semiabiertos o los intervalos cerrados.

Punto exterior

Un punto x es exterior a un conjunto S si y sólo si existe un entorno de x al cual no pertenece ningún punto de S. x es exterior a $S \Leftrightarrow$ $\exists E(x) / E(x) \cap S = \phi$. Si $S = [a;b]$, c es exterior.

Designamos al conjunto de puntos exteriores como $S_e = \{x / x$ es punto exterior de $S\}$.

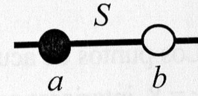


Ejemplo: en $S = [0;2)$, $c = 3$

Punto frontera

Un punto x es frontera del conjunto S si y sólo no es interior ni exterior al mismo. En todo entorno de x existe algún punto que pertenece a S y alguno que no pertenece a S. El punto frontera puede o no pertenecer al conjunto. Designamos al conjunto de puntos frontera como $S_f = \{x / x$ es punto frontera de $S\}$. Si $S = [a;b)$, a y b son frontera.

Ejemplo: el 0 es frontera para $\mathbb{R}^+$ o $\mathbb{R}^-$



Teorema de Weierstrass

Si un conjunto infinito está acotado entonces dicho conjunto tiene por lo menos un punto de acumulación.

EJEMPLOS RESUELTOS

Dados los siguientes conjuntos, determinar los puntos de acumulación, aislados, interiores, exteriores y frontera.

a) $A=(1;7]$

Todos los puntos son de acumulación $A'=[1;7]$, aislados no hay, interiores son $A_i=(1;7)$, exteriores son $A_e=(-\infty;-1)\cup(7;+\infty)$ y frontera $A_f=\{1;7\}$.

b) $B=\{x/x\in\Re \wedge x^2<36\}$. $B=(-6;6)$

Todos los puntos son de acumulación $B'=[-6;6]$, aislados no hay, interiores son todos $B_i=(-6;6)$, exteriores son $B_e=(-\infty;-6)\cup(6;+\infty)$ y frontera $B_f=\{-6;6\}$.

B es un conjunto abierto.

c) $C=\{x/x\in\Re \wedge -1\le x<3 \vee x=5\}$

Los puntos de acumulación son $C'=[-1;3]$, punto aislado es $x=5$, interiores son $C_i=(-1;3)$, exteriores son $C_e=(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)-\{5\}$ y frontera $C_f=\{-1;3;5\}$.

d) $D=\{x/x\in\Re \wedge |2x-4|<6 \vee |x-7|=1\}$

$-6<2x-4<6 \Rightarrow -2<2x<10 \Rightarrow -1<x<5$

$|x-7|=1 \Rightarrow x-7=1 \vee x-7=-1 \Rightarrow x=8 \vee x=6$

$D=(-1;5)\cup\{6;8\}$

Los puntos de acumulación son $D'=[-1;5]$, puntos aislados son $x=6$ y $x=8$, interiores son $D_i=(-1;5)$.

Exteriores son $C_e=(-\infty;-1)\cup(5;+\infty)-\{6;8\}$ y frontera $C_f=\{-1;5;6;8\}$.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1) Determinar el conjunto de todos los números reales tales que su cuadrado sea menor que 16.

2) Hallar todos los entornos con centro en el origen que contengan al intervalo (–1;3).

3) Resolver las siguientes desigualdades

a) $\dfrac{1-x}{x+2}\le 0$ b) $0<|x+1|<4$ c) $x^2-x-2\ge 0$

d) $-x^2+2x+3\ge 0$ e) $\dfrac{x+2}{x-3}\ge 2$ f) $x^3-4x<0$

4) Hallar cotas y extremos de los conjuntos solución del ejercicio 3.

5) Encuentre el conjunto derivado y el conjunto de puntos aislados de:

a) $A=\mathbb{R}$ b) $A=\left\{x/x=\dfrac{n+1}{5n+3}\wedge n\in \aleph\right\}$

c) $B=\{x/x^2<4 \vee x=7\}$

6) Dado los siguientes conjuntos determinar: a) conjunto mayorante, b) conjunto minorante, c) supremo, d) máximo, e) ínfimo, f) mínimo, g) conjunto derivado, h) puntos interiores, i) puntos exteriores, j) puntos frontera.

i) $A=\{x/x\in\Re \wedge |x-3|<4 \vee x=7\}$

ii) $B=\{x/x\in\Re \wedge x^2-4<0 \vee x^2=9\}$

iii) $C=\left\{x/x\in\Re \wedge \dfrac{x-5}{x+2}<2\right\}$

iv) $D=\{x/x\in\Re \wedge x^3-4x>0\}$

RESPUESTAS

1) $(-4;4)$ 2) $E(0{,}3+\varepsilon)$

3) a) $(-\infty;-2)\cup[1;+\infty)$ b) $(-5;-1)\cup(-1;3)$ c) $(-\infty;-1]\cup[2;+\infty)$
d) $[-1;3]$ e) $(3;8]$ f) $(-\infty;-2)\cup(0;2)$

4) 3a) y 3c) no son conjuntos acotados.
3b) conj. may. = $[3;+\infty)$ y conj. min. = $(-\infty;-5]$, el supremo es 3, el ínfimo es –5.
3d) conj. may. = $[3;+\infty)$ y conj. min. = $(-\infty;-1]$, el supremo y máximo es 3, el ínfimo y mínimo es –1.
3e) conj. may. = $[8;+\infty)$ y conj. min. = $(-\infty;3]$, el supremo y máximo es 8, el ínfimo es 3.
3f) conj. may. = $[2;+\infty)$ y conj. min. = $\varnothing$, el supremo es 2.

5) a) $A'=\mathbb{R}$, conjunto aislado = $\varnothing$
b) $A'=\left\{\frac{1}{5}\right\}$, conjunto aislado = A
c) $B'=[-2;2]$, conjunto aislado $A=\{7\}$

6) i) a) $[7;+\infty)$, b) $(-\infty;-1]$, c) el supremo es 7, d) el máximo es 7, e) el ínfimo es –1, f) $\nexists$ mínimo, g) $A'=[-1;7]$, h) $A_i=(-1;7)$, i) $A_e=(-\infty;-1)\cup(7;+\infty)$, j) $A_f=\{1;7\}$.
ii) a) $[3;+\infty)$, b) $(-\infty;-3]$, c) el supremo es 3, d) el máximo es 3, e) el ínfimo es –3, f) el mínimo –3, g) $B'=[-2;2]$, h) $B_i=(-2;2)$, i) $B_e=(-\infty;-2)-\{-3\}\cup(2;+\infty)-\{3\}$, j) $B_f=\{-2;-3;2;3\}$.
iii) a) $\varnothing$, b) $\varnothing$, c) no tiene supremo, d) no tiene máximo, e) no tiene ínfimo, f) no tiene mínimo, g) $C'=C$, h) $C_i=C$, i) $C_e=(-9;-2)$, j) $C_f=\{-2;-9\}$.
iv) a) $\varnothing$, b) $(-\infty;-2]$, c) no tiene supremo, d) no tiene máximo, e) el ínfimo es –2, f) no tiene mínimo, g) $D'=[-2;0]\cup[2;+\infty]$, h) $D_i=D$, i) $D_e=(-\infty;-2)\cup(0;2)$, j) $D_f=\{-2;0;2\}$.

Capítulo 2

Funciones

Definición y clasificación. Dominio, imagen. Ceros.

Función inversa. Función compuesta. Paridad.

Funciones polinómicas: función lineal, cuadrática y cúbica.

Función raíz cuadrada, función homográfica.

Función logaritmo y función exponencial. Propiedades de los logaritmos.

Funciones trigonométricas e hiperbólicas. Identidades trigonométricas.

Función mantisa, función parte entera, función signo.

La circunferencia y la elipse.

FUNCIONES

La relación $f : A \to B / y = f(x)$ es una función sí y solo sí verifica las siguientes condiciones de existencia y unicidad.

a) *Todo elemento del conjunto de partida A tiene imagen en B.* *Dom* $f = A$.

b) *Esa imagen es única.*

Veremos en este capítulo algunas características generales de las funciones y haremos un breve repaso de las distintas funciones que utilizaremos a lo largo del curso.

Funciones escalares o reales de variable real

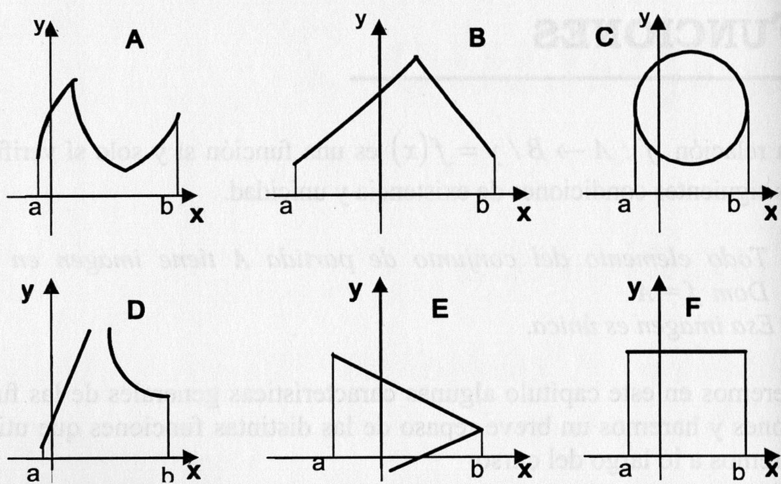
Se denomina así a las funciones cuyo dominio son los números reales o un subconjunto de ellos y cuyo conjunto de llegada también son números reales. En general se expresan como:

$$f : A \to B / y = f(x) \qquad \text{donde } A \subseteq \Re \text{ y } B \subseteq \Re$$

La representación gráfica de una función escalar de una variable real es una curva en el plano donde se considera un sistema de coordenadas ortogonales y se toma el dominio sobre el eje de abscisas y la imagen sobre el eje de ordenadas.

Debido a la definición dada para funciones, para que el gráfico de una relación represente a una función si trazamos paralelas al eje y (en la zona del dominio), éstas deben cortar a la curva y deben hacerlo en un solo punto.

Analizaremos los siguientes ejemplos de relaciones definidas de $[a;b] \to \Re$:



Los casos A, B, y F representan funciones.

Los casos C y E no lo son porque hay elementos que tienen dos imágenes.

El caso D no lo es porque hay elementos que no tienen imagen (la paralela al eje y no corta a la curva).

Dominio de una función escalar

El dominio está formado por todos los números reales para los cuales existe imagen real. Dom $f = \{x \in A / \exists y \in B \wedge y = f(x)\}$.

Hay que tener en cuenta tres tipos de restricciones:

1) Denominadores $\neq 0$.
2) Argumentos de logaritmos > 0.
3) Radicando de raíces de índice par ≥ 0.

Ejemplos

Determinar el conjunto A para que las siguientes relaciones sean funciones de $A \to \Re$.

a) $f: A \to \Re / f(x) = \dfrac{1}{x}$

Vemos que existe imagen para todo $x \neq 0$:
Dom $f = A = \{x / x \in \Re \wedge x \neq 0\} = \Re - \{0\}$

b) $f: A \to \Re / f(x) = \dfrac{2}{4 - x^2}$

Vemos que existe imagen para todo $x \neq |2|$:

Dom $f = A = \{x / x \in \Re \wedge x \neq 2 \wedge x \neq -2\} = \Re - \{2; -2\}$

c) $f: A \to \Re / f(x) = \sqrt{x-2}$

Para que exista imagen el radicando debe ser mayor o igual a cero $x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$ $\therefore$ Dom $f = A = \{x / x \in \Re \wedge x \geq 2\} = [2;+\infty)$

Vemos que también se puede expresar como intervalo.

d) $f: A \to \Re / f(x) = ln\ (2x+3)$

Para que exista imagen el argumento del logaritmo debe ser positivo.

$2x + 3 > 0 \Rightarrow x > -\dfrac{3}{2}$ $\therefore$ Dom $f = A = \left\{x / x \in \Re \wedge x > -\dfrac{3}{2}\right\} = \left(-\dfrac{3}{2};+\infty\right)$

e) $f: A \to \Re / f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x+1}}$, para que exista imagen el radicando debe ser mayor a 0. $x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$

Dom $f = A = \{x / x \in \Re \wedge x > -1\} = (-1;+\infty)$

Conjunto imagen

Se denomina así al conjunto de valores que toman las imágenes (es decir y). Si $f: A \to B / y = f(x)$, Im $f \subseteq B$.

Ejemplos

a) $f: \Re \to \Re \,/\, f(x) = x^2$

El dominio son todos los números reales, pero el conjunto imagen son los reales no negativos, ya que al elevar un número real al cuadrado no se puede obtener un número negativo, por lo tanto $\text{Im} f = [0;+\infty)$.

b) $f: \Re \to \Re \,/\, f(x) = 1 - x^2$

El dominio son todos los números reales. En este caso las imágenes son números menores o iguales a 1 ya que estamos restando de 1 un número no negativo, por lo tanto $\text{Im} f = (-\infty;1]$.

c) $f: \Re \to \Re \,/\, f(x) = 2^x$

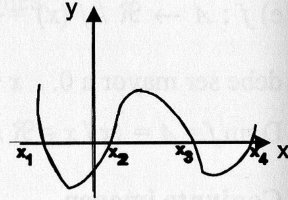
El dominio son todos los números reales. Vemos ahora que el conjunto imagen son los números reales positivos, ya que al elevar un número positivo a cualquier exponente real, se obtiene otro número positivo por lo tanto $\text{Im} f = \Re^+$.

Nota: no siempre es fácil obtener el conjunto imagen. Veremos luego, al ver las representaciones gráficas de distintas funciones, que muchas veces es más sencillo obtener el conjunto imagen a partir de los gráficos.

Ceros o raíces de una función - Intersección con el eje x

Se denomina así a los valores de x para los cuales la función se anula, es decir:

$C_0 = \{x \,/\, x \in \text{Dom } f \wedge f(x) = 0\}$.



Geométricamente representa los puntos donde la curva interseca al eje x. Los denominamos como $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$.

Ejemplos

a) $f: \Re \to \Re \,/\, f(x) = x + 2$

Para buscar los ceros hacemos $x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -2$.

b) $f: \Re \to \Re \,/\, f(x) = x^2 - 4$

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = -2$, esta función tiene 2 ceros.

c) $f: \Re \to \Re \,/\, f(x) = 2^{x+1}$

$2^{x+1} \neq 0 \;\forall x \in \Re$

Esta función no tiene ceros, es decir que la curva representativa de la misma no interseca al eje x.

d) $f: (1;+\infty) \to \Re \,/\, f(x) = ln\,(x-1)$

Hacemos $ln\,(x-1) = 0 \Rightarrow x - 1 = 1 \;\therefore\; x_1 = 2$

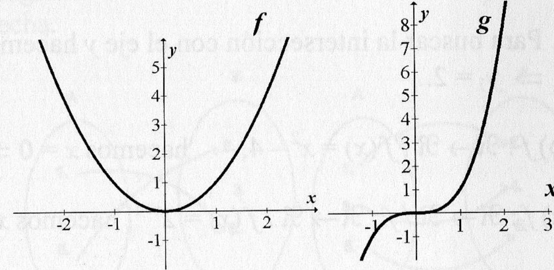
Nota: si un cero es simple o múltiple de orden impar la curva ***atraviesa*** al eje x, si es múltiple de orden par ***rebota***.

Ejemplos

$f: \Re \to \Re \,/\, f(x) = x^2$ tiene dos ceros: $x_1 = x_2 = 0$

El 0 es raíz doble, por lo tanto la curva ***rebota*** sobre el eje x.

$g: \Re \to \Re \,/\, g(x) = x^3$ tiene tres ceros: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.



El 0 es raíz triple, por lo tanto la curva ***atraviesa*** el eje x.

Conjunto de positividad y negatividad

Se denomina así al conjunto de valores del dominio para los cuales la función es positiva o negativa respectivamente.

$C_+ = \{x \,/\, x \in \text{Dom} f \wedge f(x) > 0\}$ $C_- = \{x \,/\, x \in \text{Dom} f \wedge f(x) < 0\}$

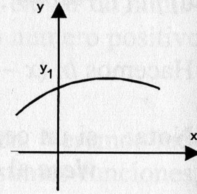
Ejemplo: $f: (1;+\infty) \to \Re \,/\, f(x) = ln\,(x-1)$

C_0: $ln\,(x-1) = 0,\ x-1 = 1 \Rightarrow x = 2$ $C_0 = \{2\}$
C_+: $ln\,(x-1) > 0,\ x-1 > 1 \Rightarrow x > 2$ $C_+ = (2;+\infty)$
C_-: $ln\,(x-1) < 0,\ x-1 < 1 \Rightarrow 1 < x < 2$ $C_- = (1;2)$

Dom $f = C_+ \cup C_- \cup C_0$

Intersección con el eje *y* – la ordenada al origen

El punto donde la curva interseca al eje *y* se obtiene haciendo $x = 0$, siempre y cuando $0 \in$ Dom *f*. Lo denominamos ***ordenada al origen*** y se designa como y_1. Si la curva representa a una función no puede intersecar al eje *y* en más de un punto.



Ejemplos

a) $f: \Re \to \Re \,/\, f(x) = x + 2$

Para buscar la intersección con el eje *y* hacemos $x = 0$: $0 + 2 = 2$ $\Rightarrow y_1 = 2$.

b) $f: \Re \to \Re \,/\, f(x) = x^2 - 4$, hacemos $x = 0 \Rightarrow y_1 = -4$

c) $f: \Re \to \Re \,/\, f: \Re \to \Re \,/\, f(x) = 2^{x+1}$, hacemos $x = 0 \Rightarrow 2^1 = 2 \therefore y_1 = 2$

d) $f: (1;\infty) \to \Re \,/\, f(x) = ln\,(x-1)$

$x = 0 \notin$ Dom $f \Rightarrow$ no existe intersección con el eje *y*.

Clasificación de las Funciones

Función inyectiva

Una función es ***inyectiva*** si a elementos distintos del dominio les corresponden imágenes distintas, o lo que es lo mismo un elemento de *B* no puede ser imagen de dos elementos distintos de *A*.

$f: A \to B$ es inyectiva $\Leftrightarrow \forall x_1 \in A,\ \forall x_2 \in A: x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Ejemplos: a) $f: \Re \to \Re \,/\, f(x) = x + 2$

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1+2 \neq x_2+2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, *f* es una función inyectiva.

b) $f: \Re \to \Re \,/\, f(x) = x^2$

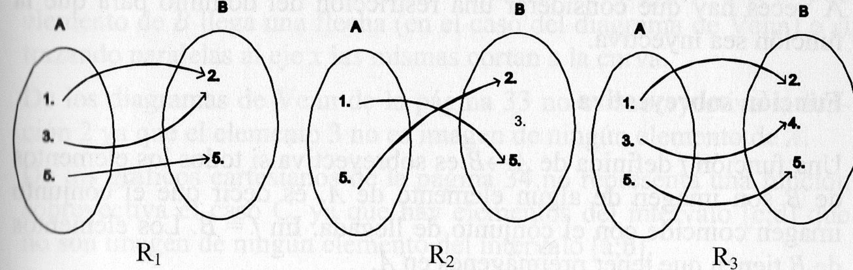
En este caso hay elementos distintos que tienen la misma imagen: $2^2 = (-2)^2$. Por lo tanto *f* no es inyectiva de $\Re \to \Re$. Pero si restringimos el dominio tenemos $f^*: [0;+\infty) \to \Re \,/\, f(x) = x^2$ que sí es inyectiva. f^* es un restricción de *f*.

c) $f: (-2;+\infty) \to \Re \,/\, f(x) = ln\,(x+2)$

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow ln\,(x_1+2) \neq ln\,(x_2+2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, *f* es una función inyectiva.

Gráficamente se puede distinguir una función inyectiva de la siguiente manera:

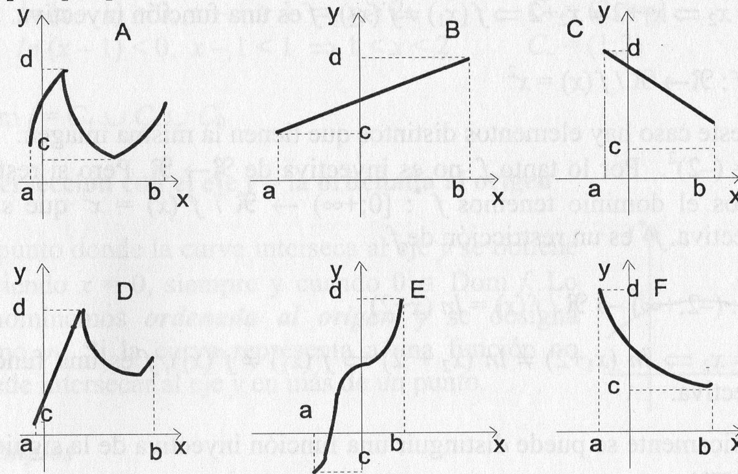
a) si el gráfico es un diagrama de Venn a un elemento de *B* no pueden llegar más de una flecha.



Las relaciones 2 y 3 son funciones inyectivas. La relación 1 no lo es porque los elementos 1 y 3 tienen la misma imagen, el 2.

b) si la representación gráfica es un gráfico cartesiano para saber si la función es inyectiva se deben trazar paralelas al eje x y éstas deben cortar a la curva una sola vez.

Ninguno de los gráficos de la página 28 representa a una función inyectiva porque las paralelas cortan a la curva más de una vez. Analicemos los siguientes gráficos de las siguientes funciones definidas de $[a;b] \to [c;d]$:



Los casos B, C, E y F representan funciones inyectivas, no así los casos A y D.

A veces hay que considerar una restricción del dominio para que la función sea inyectiva.

Función sobreyectiva

Una función f definida de $A \to B$ es sobreyectiva si todos los elementos de B son imagen de algún elemento de A, es decir que el conjunto imagen coincide con el conjunto de llegada. Im $f = B$. Los elementos de B tienen que tener preimágenes en A.

$f: A \to B$ es sobreyectiva $\Leftrightarrow \forall y \in B\ \exists x \in A\ /\ (x;y) \in f$.

Para saber si una función es sobreyectiva debemos despejar la x y ver si $\forall y \in B$, $\exists x \in A$.

A veces hay que considerar una restricción del conjunto B para que la función sea sobreyectiva.

Ejemplos

a) $f: \Re \to \Re\ /\ f(x) = x + 2$

Despejamos la x: $x = y - 2$. Vemos que $\forall y \in \Re$, $\exists x \in \Re$ (si a un número real le restamos 2 se obtiene otro número real), por lo tanto la función es sobreyectiva de $\Re \to \Re$.

b) $f: \Re \to \Re\ /\ f(x) = x^2 + 1$

Despejamos la x: $x = \sqrt{y-1}$. Vemos que para que exista x real debe ser $y - 1 \geq 0 \Rightarrow y \geq 1$. Por lo tanto la función es sobreyectiva de $\Re \to [1;+\infty)$. Esta nueva función f^*: $\Re \to [1;+\infty)\ /\ f^*(x) = x^2 + 1$ es una restricción de f^*.

c) $f: (-2;+\infty) \to \Re\ /\ f(x) = ln\,(x + 2)$

Para despejar x aplicamos propiedades de los logaritmos: $x + 2 = e^y$, $x = e^y - 2$. Vemos que $\forall y \in \Re$, $\exists\ x \in (-2;+\infty)$, por lo tanto la función es sobreyectiva de $(-2;+\infty) \to \Re$.

Gráficamente podemos distinguir una función sobreyectiva si a todo elemento de B llega una flecha (en el caso del diagrama de Venn) o si trazando paralelas al eje x las mismas cortan a la curva.

De los diagramas de Venn de la página 33 no es sobreyectiva la función 2 ya que el elemento 3 no es imagen de ningún elemento de A.

De los gráficos cartesianos de la página 34 no representa una función sobreyectiva el caso C, ya que hay elementos del intervalo [c;d] que no son imagen de ningún elemento del intervalo [a;b].

Función biyectiva

Una función es biyectiva si es ***inyectiva*** y ***sobreyectiva***

Ejemplos de funciones biyectivas son la función 3 de los diagramas de Venn de la página 33 y los casos B, E y F de los gráficos cartesianos de la página 34.

Función inversa

Vimos en el capítulo introductorio el concepto de relación inversa. Si ésta es a su vez función recibe el nombre de ***función inversa*** y se designa como f^{-1}. Si $f: A \to B \Rightarrow f^{-1}: B \to A$.

Para que una función admita función inversa ésta debe ser biyectiva.

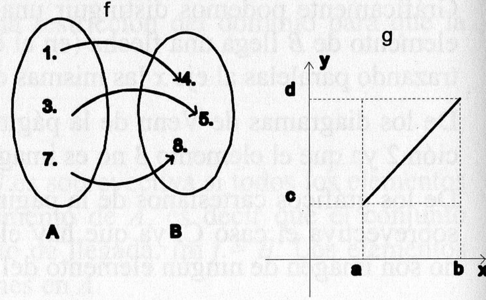
Si la función no fuese inyectiva la relación inversa no sería función porque algunos elementos de B tendrían dos imágenes en A. Si no fuese sobreyectiva habría elementos de B sin imagen en A. Por lo tanto la función debe ser biyectiva para admitir función inversa de lo contrario admite relación inversa. A veces deben efectuarse restricciones para que la función sea biyectiva y admita función inversa.

Como ya mencionamos, si la función no es inyectiva, debe restringirse el dominio, si no es sobreyectiva debe restringirse el conjunto de llegada.

Ejemplos de funciones que admiten función inversa

$f: A \to B \Rightarrow f^{-1}: B \to A$

$g: [a;b] \to [c;d] \Rightarrow$
$g^{-1}: [c;d] \to [a;b]$



Cálculo de la función inversa

Primero debemos asegurar la biyectividad. Luego, para calcular la función inversa, debemos expresar x en función de y, es decir ***despejar*** la x, tarea que no siempre es sencilla.
Como es habitual expresar a la variable independiente como x, también llamamos x a la variable independiente de f^{-1}, por lo tanto f^{-1} es $f^{-1}(x)$.

Ejemplos

a) $f: \Re \to \Re \,/\, f(x) = x + 3$

Es una función biyectiva, despejamos la x: $x = y - 3$
$\Rightarrow f^{-1}: \Re \to \Re \,/\, f^{-1}(x) = x - 3$

b) $f: \Re \to \Re \,/\, f(x) = 2x+1$

Es una función biyectiva, despejamos la x: $x = \dfrac{y-1}{2} \Rightarrow$

$f^{-1}: \Re \to \Re \,/\, f^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{2}$

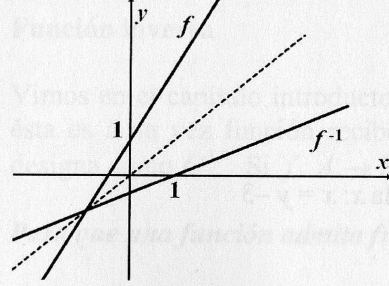
c) $f: \Re \to \Re \,/\, f(x) = x^2 + 1$

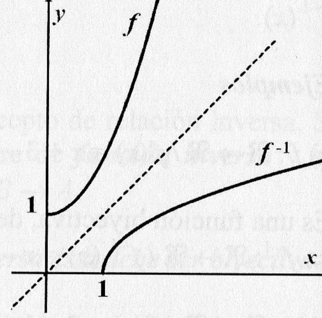
Ya vimos que esta función así definida no es sobreyectiva, tampoco es inyectiva. Debemos restringir su dominio y su conjunto de llegada para que cada elemento de B sea imagen de un solo elemento de A. Para saber como efectuar la restricción analizamos la función, hay que seleccionar los $x \geq 0$ para que sea inyectiva, y para que sea sobreyectiva vemos que las imágenes son números ≥ 1, porque a un número positivo o cero le sumamos 1. Por lo tanto consideramos la siguiente restricción de f, $f^*: [0;+\infty) \to [1;+\infty) \,/\, f^*(x) = x^2+1$, obtenemos así una función biyectiva. Para buscar la inversa despejamos la x: $x = \sqrt{y-1}$, entonces: $f^{*-1}: [1;+\infty) \to [0;+\infty) \,/\, f^{*-1}(x) = \sqrt{x-1}$.

Nota 1: Si una función es biyectiva su inversa también lo es.

Nota 2: Las gráficas de dos funciones biyectivas son simétricas respecto de la bisectriz del 1º y 3º cuadrante si se toma la misma escala en los dos ejes.

Veamos las gráficas de los casos b) y c). Más adelante veremos como se obtienen estas gráficas.





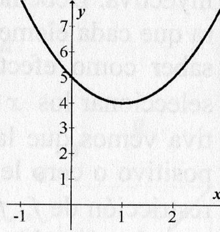
d) $f: A \to \Re \,/\, f(x) = ln\,(x+2)$

Primero buscamos A para que f sea función

$x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2$. Dom $f = (-2;+\infty)$

Esta función es biyectiva, buscamos la inversa para lo cual despejamos x: $x + 2 = e^y \Rightarrow x = e^y - 2 \;\therefore\; f^{-1}: \Re \to (-2;+\infty) \,/\, f^{-1}(x) = e^x - 2$.

e) $f: \Re \to \Re \,/\, f(x) = x^2 - 2x + 5$



Esta función no es ni inyectiva ni sobreyectiva. Debemos restringir el dominio y la imagen. Para saber como hacer la restricción completamos cuadrados, $f(x) = (x-1)^2 + 4$. Vemos que para que la función sea inyectiva, $x \geq 1$ (de esta manera se evita que dos números distintos tengan la misma imagen). Por otro lado vemos que al ser $(x-1)^2 \geq 0$, las imágenes son ≥ 4.

Consideramos la siguiente restricción de f:

$f^*: [1;+\infty) \to [4;+\infty) \,/\, f^*(x) = x^2 - 2x + 5$, que es biyectiva.

Para buscar la función inversa despejamos la x: $x = \sqrt{y-4} + 1$.

$f^{*-1}: [4;+\infty) \to [1;+\infty) \,/\, f^{*-1}(x) = \sqrt{x-4} + 1$

Nota: cuando veamos las representaciones gráficas de las funciones veremos que a veces es más fácil obtener las restricciones a partir de los gráficos.

Paridad (Sólo para funciones con dominio simétrico con respecto al origen, si $x \in A \Rightarrow -x \in A$)

Una función es par $\Leftrightarrow \forall x \in \text{Dom} f: f(-x) = f(x)$

Una función es impar $\Leftrightarrow \forall x \in \text{Dom} f: f(-x) = -f(x)$

Si una función no es par ni impar se dice que ***no tiene paridad.***

Ejemplos

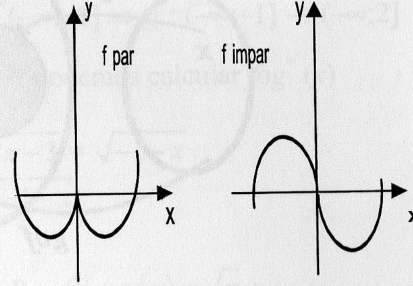
$f(x) = x^2 \quad f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x) \Rightarrow f$ es par

$f(x) = x^3 \quad f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x) \Rightarrow f$ es impar

$f(x) = x + x^2 \quad f(-x) = -x + (-x)^2 = -x + x^2 \neq f(x) \wedge \neq -f(x)$

$\Rightarrow f$ no tiene paridad

Nota: Si una función es par su gráfica es simétrica respecto del eje y.
Si una función es impar su gráfica es simétrica respecto del centro de coordenadas.



Álgebra de funciones con paridad

Si P es una función par e I es una función impar se verifica que:

a) P ± P = P, b) I ± I = I, c) P.P (P:P) = P, d) I.I (I:I) = P, e) P.I (P:I) = I,
f) P ± I no tiene paridad

Demostraciones: vemos algunos ejemplos, si f es par y g es impar.
$h(x) = f(x) + g(x)$, $h(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) - g(x)$, sin paridad
$h(x) = f(x) \cdot g(x)$, $h(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = -f(x) \cdot g(x)$, es impar

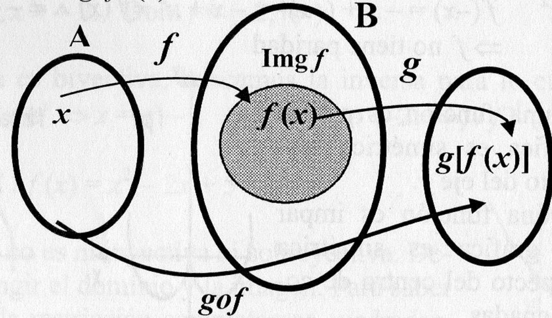
Función compuesta

Dadas las funciones escalares $f: A \to \Re$ y $g: B \to \Re$, bajo ciertas condiciones se puede obtener una nueva función $\boldsymbol{h}$ que se denomina ***función compuesta de f con g*** que se define así:

$$h: A \to \Re \,/\, h(x) = gof(x) = g[f(x)]$$

Para que h sea función de A en $\Re$ debe verificarse que la imagen de f (primera función que se aplica) esté incluida en el dominio de g (segunda función que se aplica): Im $f \subseteq$ Dom g.

Es decir que Im $f \subseteq B$. Si el dominio de g no incluye a la imagen de f para que la función compuesta exista se debe considerar una restricción de f que denominamos f^*. Obtenemos así una restricción de gof que denominamos $gof^*(x)$.



También puede definirse la ***función compuesta de g con f*** que se define así:

$$h: B \to \Re \,/\, h(x) = fog(x) = f[g(x)]$$

Ahora se aplica primero g y luego f, debe cumplirse que Im $g \subseteq$ Dom f. Si así no fuese se considera una restricción de g que denominamos g^* y lo que se obtiene es una restricción de fog llamada $fog^*(x)$.

Ejemplos

Dar dominios e imágenes de cada función. Hallar $gof(x)$ y $fog(x)$. Efectuar restricciones si fuese necesario. Finalmente definir $gof(x)$ y $fog(x)$.

a) $f: A \to \Re \,/\, f(x) = \sqrt{2-x}$ $\quad g: B \to \Re \,/\, g(x) = x + 3$

Analizamos los dominios e imágenes. $f: (-\infty;2] \to \Re_0^+$, $g: \Re \to \Re$.

Para hallar $gof(x)$ debe Im $f \subseteq$ Dom g, lo cual se verifica porque $\Re_0^+ \subseteq \Re$.

$gof: (-\infty;2] \to \Re \,/\, gof(x) = g[f(x)] = g\left(\sqrt{2-x}\right) = \sqrt{2-x} + 3$.

Para hallar $fog(x)$ debe Im $g \subseteq$ Dom f lo cual no se verifica porque $\Re \not\subseteq (-\infty;2]$.

Debemos considerar una restricción de g que denominamos g^* para que sus imágenes estén incluidas en el Dom f. La Im g debe ser $(-\infty;2]$, debemos determinar cual debe ser el dominio de g para que $(-\infty;2]$ sea su imagen.

$$x + 3 \leq 2 \Rightarrow x \leq -1 \Rightarrow \text{Dom } g^* = (-\infty;-1] \Rightarrow g^*: (-\infty;-1] \to (-\infty;2]$$

Ahora se verifica que Im $g^* \subseteq$ Dom f. Podemos calcular $fog^*(x)$

$fog^*(x) = f[g^*(x)] = f(x+3) = \sqrt{2-x-3} = \sqrt{-1-x}$
$\Rightarrow fog^*: (-\infty;-1] \to \Re \,/\, fog^*(x) = \sqrt{-1-x}$

b) $f: A \to \Re \,/\, f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ $\quad g: B \to \Re \,/\, g(x) = \sqrt{x}$

Analizamos los dominios e imágenes. $f: \Re - \{-1\} \to \Re - \{1\}$, $g: \Re_0^+ \to \Re_0^+$.

Para hallar $gof(x)$ debe Im $f \subseteq$ Dom g, lo cual no se verifica porque $\Re - \{1\} \not\subseteq \Re_0^+$.

Debemos considerar una restricción de f que denominamos f^* para que sus imágenes estén incluidas en el Dom g. La Im f debe ser $\Re_0^+$, debemos determinar cual debe ser el dominio de f para que $\Re_0^+$ sea su imagen.

$$\frac{x}{x+1} \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty;-1) \cup [0;+\infty) \Rightarrow f^*: (-\infty;-1) \cup [0;+\infty) \to \Re - \{1\}$$

Calculamos ahora $gof^*(x)$: $gof^*(x) = g\,[f^*(x)] = g\left(\frac{x}{x+1}\right) = \sqrt{\frac{x}{x+1}}$.

$gof^*(x)$: $(-\infty;-1) \cup [0;+\infty) \to \Re$.

Para hallar fog (x) debe Im $g \subseteq$ Dom f lo cual se verifica porque $\Re_0^+ \subseteq \Re - \{-1\}$.

$$f \circ g\,(x) = f[g\,(x)] = f\left(\sqrt{x}\right) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}.\quad f \circ g: \Re_0^+ \to \Re$$

Caso particular: La composición de una función con su inversa da la función identidad.

Si $f: A \to B \Rightarrow \quad f \circ f^{-1}: B \to B \qquad f \circ f^{-1}(x) = f\,[f^{-1}(x)] = x$

$\qquad f^{-1} \circ f: A \to A \qquad f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}[f(x)] = x$

ANÁLISIS Y REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LAS FUNCIONES MÁS IMPORTANTES

Empezaremos por las funciones más sencillas que son las funciones polinómicas.

FUNCIONES POLINÓMICAS

Las funciones polinómicas tienen como dominio e imagen a los números reales, en general responden a la forma:

$$f: \Re \to \Re \,/\, f(x) = p(x) = a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + a_{n-2}.x^{n-2} + \ldots + a_0,\ \text{con } a_n \neq 0.$$

Dentro de las funciones polinómicas empezamos por la más sencilla que es la función lineal.

Es el caso en que p (x) es un polinomio de grado 1.

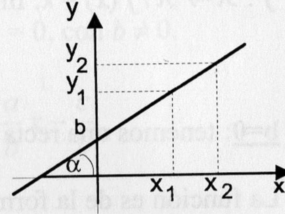
Función lineal $f: \Re \to \Re \,/\, f(x) = mx + b \qquad \text{Im} f = \Re$

La representación gráfica de la función lineal es una recta. Observamos que si $x = 0$, entonces $y = b$, es decir que b indica la intersección de la recta con el eje y, es la ***ordenada al origen***. Veremos que mide m.

Si consideramos dos puntos de la recta $P_1 = (x_1;y_1)$ y $P_2 = (x_2;y_2)$ tenemos que:

$$y_2 = mx_2 + b$$
$$y_1 = mx_1 + b$$

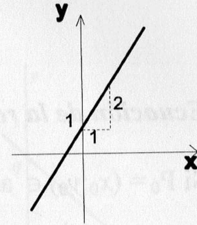
$$y_2 - y_1 = m.(x_2 - x_1) \Rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



Vemos que m mide la ***pendiente*** de la recta, es decir la tangente del ángulo α que ésta forma con el semieje positivo de las x.

Ejemplo

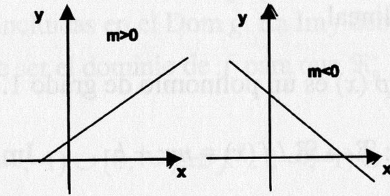
$f: \Re \to \Re \,/\, f(x) = 2x + 1 \qquad \text{Im} f = \Re$



Es una función lineal cuya gráfica es una recta que corta al eje y en $b = 1$ y tiene pendiente $m = 2$.

Para representarla gráficamente partimos de la ordenada al origen ($b = 1$) y a partir de allí tomamos 1 unidad a la derecha y 2 unidades hacia arriba (para que la tangente del ángulo que forma la recta con el semieje positivo de las x sea 2). *Cero:* $x_1 = -0{,}5$. No tiene paridad.

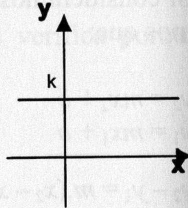
Crecimiento: si $m > 0$ la función es creciente, si $m < 0$ la función es decreciente. A mayor valor de m mayor crecimiento.



Casos particulares

m=0: la recta es horizontal y la función se denomina ***función constante***.

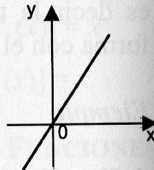
La función es de la forma:



$f: \Re \to \Re \,/\, f(x) = k$. Im $f = \{k\}$

b=0: tenemos una recta que pasa por el origen de coordenadas.

La función es de la forma:



$f: \Re \to \Re \,/\, f(x) = mx$. Im $f = \Re$

***Ecuación de la recta conocida la pendiente m y un punto* $P_0 = (x_0;y_0)$**

Si $P_0 = (x_0;y_0) \in$ a la recta, se verifica que $y_0 = mx_0 + b$

Además $y = mx + b$
$y_0 = mx_0 + b$

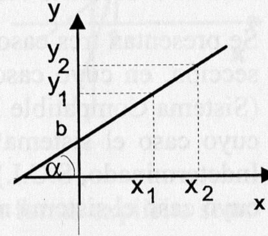
Restando miembro a miembro tenemos: $y - y_0 = m.(x - x_0)$

Ejemplo: si $m = -2$ y $P_0 = (-1;3)$, $y - 3 = -2.(x+1) \Rightarrow y = -2x - 2 + 3$
$y = -2x + 1$

***Ecuación de la recta por dos puntos* $P_0=(x_0;y_0)$ *y* $P_1=(x_1;y_1)$:**

Si en la ecuación anterior sustituimos ***m*** por $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, obtenemos:

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$



Ejemplo: si $P_0 = (1;3)$ y $P_1 = (-1;2)$,

$y - 3 = \frac{2-3}{-1-1}.(x - 1) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

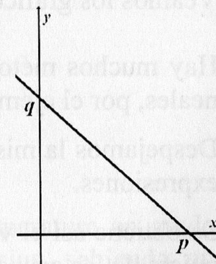
Ecuación general de la recta

La ecuación general de la recta es: $ax + by + c = 0$, con $b \neq 0$.

De donde se deduce, despejando y, que $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$.

Donde $m = -\frac{a}{b}$.

Forma segmentaria



A partir de la ecuación general se puede obtener la forma segmentaria. Pasamos el término c ($c \neq 0$) al otro miembro y luego dividimos toda la ecuación por c. Haciendo luego: $-\frac{c}{a} = p$ y $-\frac{c}{b} = q$, llegamos a la forma segmentaria:

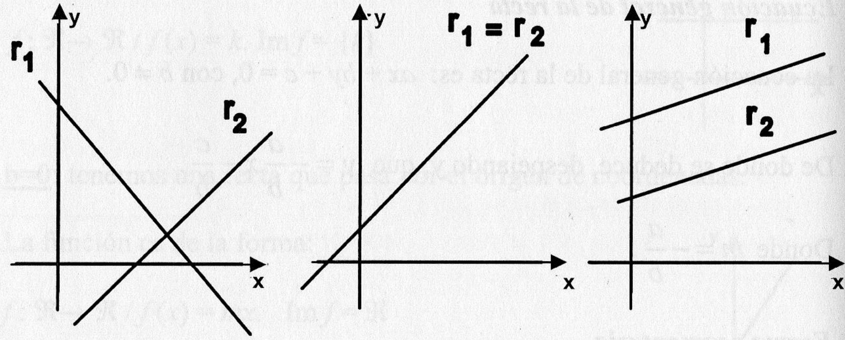
$$ax + by = -c \Rightarrow \frac{x}{-\frac{c}{a}} + \frac{y}{-\frac{c}{b}} = 1 \therefore \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1,$$

donde p y q representan los puntos de intersección de la recta con los ejes x e y respectivamente, ($p \neq 0$ y $q \neq 0$).

Intersección de Rectas

Para determinar el punto de intersección de dos rectas es necesario resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Ambas ecuaciones constituyen un sistema.

Se presentan tres casos: que las rectas tengan un único punto de intersección, en cuyo caso el sistema de ecuaciones tiene solución única (Sistema Compatible Determinado, S.C.D.), que sean coincidentes, en cuyo caso el sistema tiene infinitas soluciones (Sistema Compatible Indeterminado, S.C.I.), o que sean rectas paralelas no coincidentes, en cuyo caso el sistema no tiene solución (Sistema Incompatible. S.I.).



Veamos los gráficos correspondientes a cada caso.

Hay muchos métodos para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales, por el ejemplo el método de igualación.

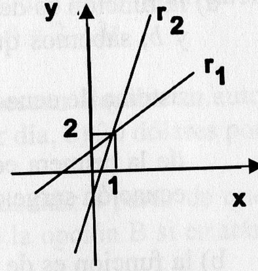
Despejamos la misma incógnita en ambas ecuaciones e igualamos sus expresiones.

Se obtiene así el valor de una incógnita, luego reemplazando en cualquiera de las ecuaciones se obtiene el valor de la otra incógnita.

Ejemplo r_1: $y = 3x - 1$, r_2: $y = x+1$

Con ambas ecuaciones formamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = 3x - 1 \\ y = x + 1 \end{cases}$$



Igualamos las ecuaciones: $3x - 1 = x + 1$ $\Rightarrow 2x = 2 \therefore x = 1$, reemplazando obtenemos que $y = 2$, de donde S = {(1;2)}. Las rectas se cortan en el punto P = (1;2).

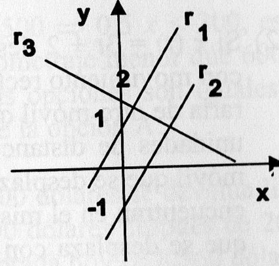
Condición de Paralelismo y Perpendicularidad

Consideremos dos rectas cuyas ecuaciones en su forma explícita sean:

$$r_1\text{: } y = m_1 x + b_1 \text{ e } r_2\text{: } y = m_2 x + b_2$$

Si $m_1 = m_2$ las rectas son ***paralelas***. Es decir que dos rectas son paralelas si tienen la misma pendiente.

Ejemplos: r_1: $y = 2x + 1$, r_2: $y = 2x - 1$



Si $m_1 = -\dfrac{1}{m_2}$ las rectas son ***perpendiculares***. Para que dos rectas sean perpendiculares sus pendientes tienen que ser inversas y de signos contrarios.

Ejemplos: r_1: $y = 2x + 1$, r_3: $y = -\dfrac{1}{2}x + 2$

Ejemplos de ejercicios de función lineal resueltos

1) Encontrar: a) la función lineal ***f*** que da la temperatura en grados Farenheit, conocida la misma en grados Celsius, sabiendo que 0ºC = 32ºF y que 100ºC = 212ºF, b) la función ***g*** que da la temperatura en grados Celsius conocida la misma en grados Fahrenheit.

a) la función es de la forma $y = f(x) = mx + b$, debemos calcular m y b, sabemos que $f(0) = 32$ y que $f(100) = 212$. Armamos un sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 32 = m.0 + b \\ 212 = m.100 + b \end{cases}$

de la primera ecuación surge que $b = 32$, reemplazando en la 2º ecuación surge que $m = 1{,}8$. La función f es $y = f(x) = 1{,}8\,x + 32$.

b) la función es de la forma $y = g(x) = mx + b$, debemos calcular m y b, sabemos que $g(32) = 0$ y que $g(212) = 100$. Armamos un sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 0 = m.32 + b \\ 100 = m.212 + b \end{cases}$

de la primera ecuación surge que $b = -32\,m$, reemplazando en la 2º queda: $212\,m - 32\,m = 100 \Rightarrow 180\,m = 100 \Rightarrow m = 0{,}55$, luego $b = -32 \cdot 0{,}55 = -17{,}6$.
La función g es $y = g(x) = 0{,}55\,x - 17{,}6$.

2) Si $x(t) = 3t + 2$ describe la posición de un móvil que se desplaza con movimiento rectilíneo uniforme, determinar: a) la ecuación horaria de otro móvil que se desplaza a igual velocidad y que está dos unidades de distancia adelantado, b) la ecuación horaria de otro móvil que se desplaza al doble de velocidad y en el instante $t = 0$ se encuentran en el mismo punto, c) la ecuación horaria de otro móvil que se desplaza con la misma rapidez pero en sentido contrario y parten en $t = 0$ del mismo punto.

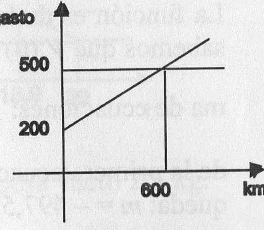
a) la ecuación que buscamos es de la forma $x(t) = x_0 + vt$. Si la velocidad es la misma $v = 3$ y si el móvil está dos unidades más adelante quiere decir que $x(0) = x_0 + 3.0 = 4 \Rightarrow x_0 = 4$. La ecuación horaria es $x_1(t) = 4 + 3t$.

b) la ecuación que buscamos es de la forma $x(t) = x_0 + vt$. Si la velocidad es el doble, entonces $v = 6$ y si el móvil parte del mismo punto $\Rightarrow x_0 = 2 \Rightarrow x(t) = 2 + 6t \Rightarrow x_0 = 4$.

c) la ecuación horaria es $x_2(t) = 4 + 3t$.

d) Si la posición inicial es la misma y la velocidad tiene igual valor pero sentido contrario quiere decir que $x_3(t) = 2 - 3t$.

3) Unos amigos se encuentran de vacaciones. Desean alquilar un auto y disponen de dos opciones: a) 50 dólares por día, b) 20 dólares por día + 0,5 dólares por km recorrido.
Estudiar la función gasto en cada opción y decidir a partir de qué recorrido es más económica la opción A que la opción B si estarán 10 días de vacaciones.



En el caso a) la función de gasto es $g(x) = 500$, por ser 10 los días, el gasto no depende del número de kms recorrido.
En el caso b) la función de gasto es:
$g(x) = 0{,}5\,x + 200$, donde x es el número de kms recorridos.
Para determinar qué opción es más económica debemos plantear: $0{,}5\,x + 200 < 500 \Rightarrow 0{,}5\,x < 300$, es decir que $x < 600$. Por lo tanto para un kilometraje menor que 600 conviene la 2º opción, para 600 km ambas opciones son iguales. Para un kilometraje superior a 600 conviene la opción A.

4) Una pieza de equipo comprada hoy en 8.000 dólares se devalúa linealmente hacia el valor de chatarra de 200 dólares después de 20 años. En cambio otra pieza de equipo comprada hoy en 8.560 dólares se devalúa linealmente hacia el valor de chatarra de 600 dólares en 16 años.

a) Escribir una fórmula del valor de V para cada pieza en función del tiempo.
b) Determinar cuál de las dos piezas se devalúa más rápidamente.
c) Determinar, cuándo, en los próximos 16 años, el valor de las dos piezas será el mismo.
d) ¿En alguna otra oportunidad, después de los 16 años, valdrán lo mismo, suponiendo que el valor de la chatarra se conserva constante en el tiempo?
e) Haga un gráfico de la situación e interprete en él cada respuesta.

a) la función es de la forma $V(t) = mt + b$, debemos calcular m y b, sabemos que $V(0) = 8.000$ y que $V(20) = 200$. Armamos un sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 8000 = m.0 + b \\ 200 = m.20 + b \end{cases}$

de la primera ecuación surge que $b = 8.000$, reemplazando en la 2[da] ecuación surge que $m = -390$.

La función es $V(t) = -390\,t + 8000$

La función es de la forma $V(t) = mt + b$, debemos calcular m y b, sabemos que $V(0) = 8.560$ y que $V(16) = 600$. Armamos un sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 8.560 = m.0 + b \\ 600 = m.16 + b \end{cases}$

de la primera ecuación surge que $b = 8.560$, reemplazando en la 2[da] queda: $m = -497{,}5$.

La función es $V(t) = -497{,}5\,t - 8.560$.

b) para analizar cuál se devalúa más rápidamente debemos considerar el valor absoluto de las pendientes, la 2[da] pieza se devalúa más rápidamente por ser su pendiente de mayor valor absoluto.

c) para determinar el instante en el que las piezas valen lo mismo igualamos las funciones

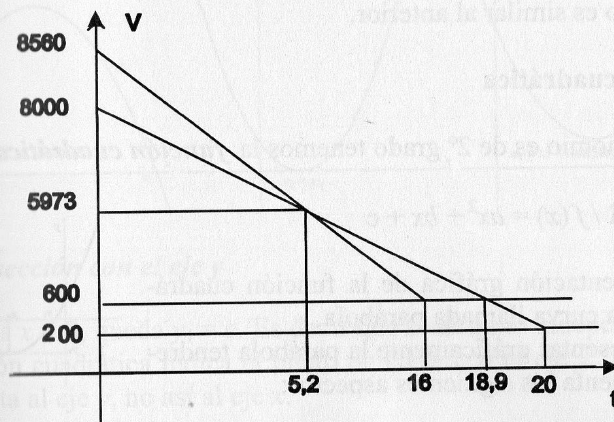
$$-497{,}5\,t + 8.560 = -390\,t + 8.000 \Rightarrow 107{,}5\,t = 560 \Rightarrow t = 5{,}2$$

El mismo valor lo tendrán a los 5 años 2 meses y 12 días.

d) a partir de los 16 años la 2° pieza conserva su valor de 600, hay que ver si la 1[ra] pieza, entre los 16 años y los 20 años, adquiere ese valor:

$-390\,t + 8.000 = 600 \Rightarrow t = 18{,}97 \Rightarrow$ que casi en el año 19 ambas valdrán 600 dólares.

e) veamos ahora la resolución gráfica

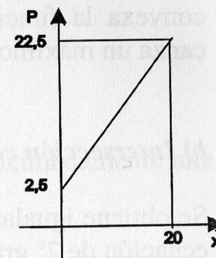


5) Un barril vacío con capacidad para 20 litros pesa vacío 2,5 kg.

a) hallar la fórmula y representar la función peso total del barril en función de la cantidad de agua (en litros) que contiene.

b) hallar dominio e imagen

a) como 1 litro de agua pesa 1 kg al peso del barril vacío hay que sumarle el peso del agua a razón de 1 kg por litro, por lo tanto la función es: $p(x) = 2{,}5 + x$, donde x es el número de litros de agua que contiene.



b) el dominio es [0;20], la imagen [2,5;22,5]

6) Resolver el problema anterior si el barril contiene mercurio y 3 litros de mercurio pesan 40,8 kg.

Ahora hay que considerar el peso el mercurio, para lo cuál debemos determinar cuánto pesa cada litro de mercurio. Si 3 lts. pesan 40,8 kg, se deduce que 1 lt pesa 13,6 kg.

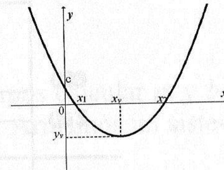
Por lo tanto la función ahora es: $P(x) = 2{,}5 + 13{,}6\,x$.

El dominio sigue siendo [0;20] y la imagen ahora es [2,5;43,3]. El gráfico es similar al anterior.

Función cuadrática

Si el polinomio es de 2° grado tenemos la ***función cuadrática.***

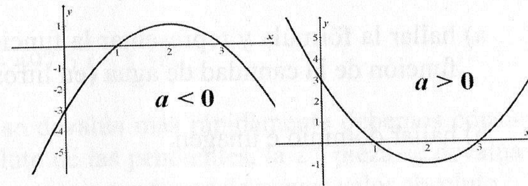
$f: \Re \to \Re \,/\, f(x) = ax^2 + bx + c$



La representación gráfica de la función cuadrática es una curva llamada parábola.
Para representar gráficamente la parábola tendremos en cuenta los siguientes aspectos:

a) Concavidad

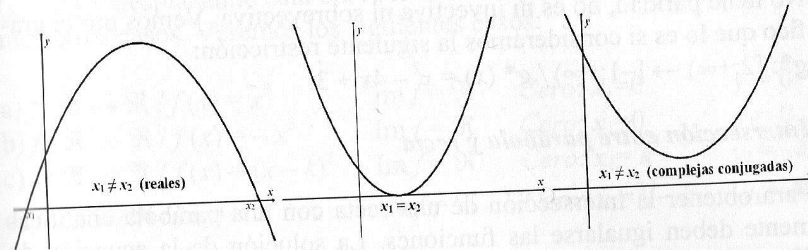
Si $a > 0$, la parábola es cóncava, la función alcanza un mínimo.
Si $a < 0$, la parábola es convexa la función alcanza un máximo.



b) Intersección con el eje x

Se obtiene igualando la función a 0, $ax^2 + bx + c = 0$[1], resolviendo la ecuación de 2° grado se obtienen los puntos de intersección de la parábola con el eje x. Si la ecuación tiene dos raíces x_1 y x_2 reales distintas, la parábola corta al eje x en dos puntos, si las raíces son reales múltiples, hay un solo punto de intersección y si las raíces son complejas no hay intersección entre la parábola y el eje x.

[1] $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, fórmula del siglo XII debida al matemático hindú BHASKHARA



c) Intersección con el eje y

Hacemos $x = 0$, queda $y_1 = c$. Es decir que el término independiente de la función cuadrática indica el punto de corte con el eje y. Toda parábola corta al eje y, no así al eje x.

d) Vértice

Un punto muy importante para su gráfico es el vértice: $V = (x_v;y_v)$

$x_v = -\dfrac{b}{2a}$, $y_v = f(x_v)$ (valor que toma la función para la x del vértice)

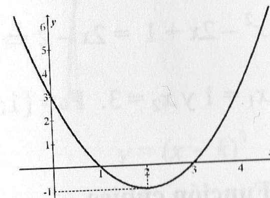
e) Eje de simetría

$$x = x_v$$

Con toda esta información se puede representar aproximadamente una función cuadrática.

Ejemplo

$f: \Re \to \Re \,/\, f(x) = x^2 - 4x + 3$. $\text{Im} f = [-1;+\infty)$

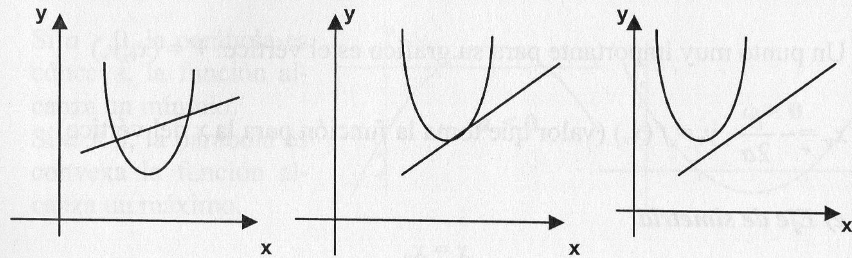


a) $a = 1 > 0 \Rightarrow f$ es cóncava
b) $x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow$ *Ceros:* $x_1 = 1$, $x_2 = 3$
c) $y_1 = 3$
d) $x_v = \dfrac{4}{2} = 2$, $y_v = f(2) = 4 - 8 + 3 = -1 \Rightarrow V = (2;-1)$
e) $x = 2$

No tiene paridad, no es ni inyectiva ni sobreyectiva. Vemos por el gráfico que lo es si consideramos la siguiente restricción:
$g^*: [2;+\infty) \to [-1;+\infty) \,/\, g^*(x) = x^2 - 4x + 3$.

Intersección entre parábola y recta

Para obtener la intersección de una recta con una parábola analíticamente deben igualarse las funciones. La solución de la ecuación de 2º grado planteada indica los puntos de intersección de ambas gráficas. La ecuación de 2º grado puede tener, como ya vimos, dos soluciones reales distintas, dos soluciones reales iguales, o soluciones complejas. Esto indica que la parábola y la recta pueden intersecarse en dos puntos (son secantes), en un solo punto (son tangentes), o no intersecarse (la recta es exterior a la parábola). Veamos gráficamente las distintas situaciones.

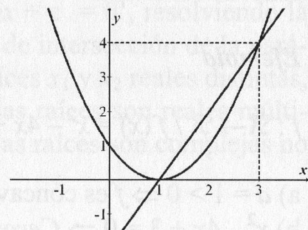


Ejemplo: hallar gráfica y analíticamente la intersección de

$f(x) = x^2 - 2x + 1$ con $g(x) = 2x - 2$

$x^2 - 2x + 1 = 2x - 2 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$

$x_1 = 1$ y $x_2 = 3$. $P_0 = (1;0)$, $P_1 = (3;4)$

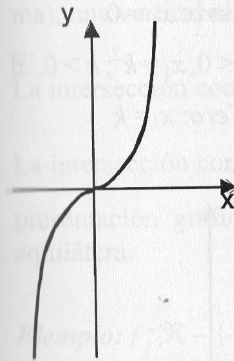


Función cúbica

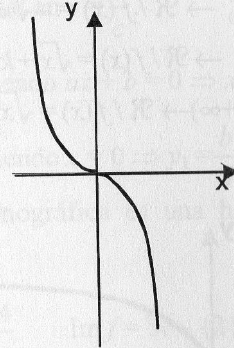
Si el polinomio es de 3º grado tenemos la función cúbica cuya representación gráfica es la parábola cúbica. Partimos de la función básica

$(y = x^3)$ y desplazando esta curva horizontal y verticalmente obtendremos otros casos. Veremos los siguientes casos:

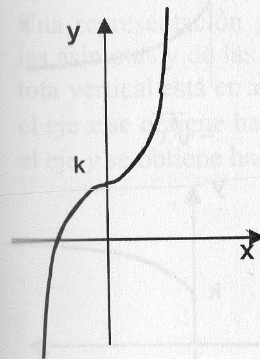
a) $f: \Re \to \Re \,/\, f(x) = x^3$ $\quad \text{Im} f = \Re$ $\quad$ *Cero*: $x_1 = 0$ $\quad y_1 = 0$
b) $f: \Re \to \Re \,/\, f(x) = -x^3$ $\quad \text{Im} f = \Re$ $\quad$ *Cero*: $x_1 = 0$ $\quad y_1 = 0$
c) $f: \Re \to \Re \,/\, f(x) = (x-k)^3$ $\quad \text{Im} f = \Re$ $\quad$ *Cero*: $x_1 = k$ $\quad y_1 = -k^3$
d) $f: \Re \to \Re \,/\, f(x) = x^3 + k$ $\quad \text{Im} f = \Re$ $\quad$ *Cero*: $x_1 = \sqrt[3]{-k}$ $\quad y_1 = k$



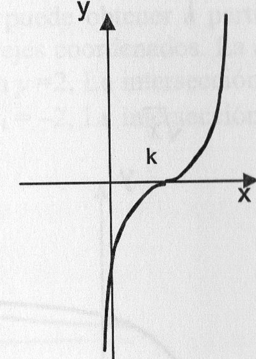
$y = x^3$



$y = -x^3$



$y = x^3 + k$



$y = (x - k)^3$

La Función Raíz Cuadrada

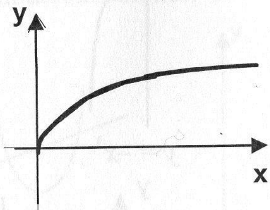
Tomamos como función base $f: \Re_0^+ \to \Re \,/\, f(x) = \sqrt{x}$ y luego obtendremos otras funciones a partir del desplazamiento horizontal o vertical de ésta.

a) $f: \Re_0^+ \to \Re \,/\, f(x) = \sqrt{x}$ $\quad$ $\text{Im} f = [0;+\infty)$ $\quad$ *Cero*: $x_1 = 0$

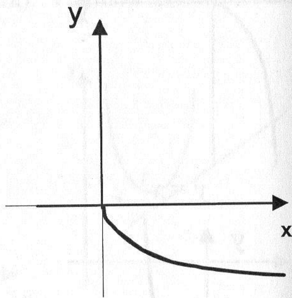
b) $f: \Re_0^+ \to \Re \,/\, f(x) = -\sqrt{x}$ $\quad$ $\text{Im} f = (-\infty;0]$ $\quad$ *Cero*: $x_1 = 0$

c) $f: \Re_0^+ \to \Re \,/\, f(x) = \sqrt{x} + k$ $\quad$ $\text{Im} f = [k\,;+\infty)$ *Cero*: $k < 0, x_1 = k^2; k > 0, \nexists$

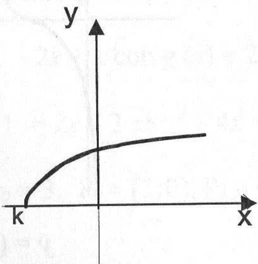
d) $f: [k;+\infty) \to \Re \,/\, f(x) = \sqrt{x-k}$ $\quad$ $\text{Im} f = [0;+\infty)$ $\quad$ *Cero*: $x_1 = k$



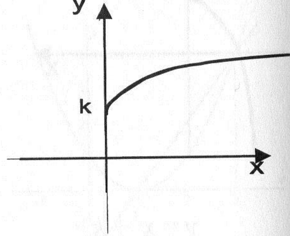
$\sqrt{x}$



$-\sqrt{x}$



$\sqrt{x-k}$ $\quad$ con $k > 0$



$\sqrt{x} + k$

Función Homográfica

$f: \Re - \left\{-\dfrac{d}{c}\right\} \to \Re \,/\, f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ con $c \neq 0$ y $a.d - b.c \neq 0$. Son un caso particular de las funciones racionales que veremos después.

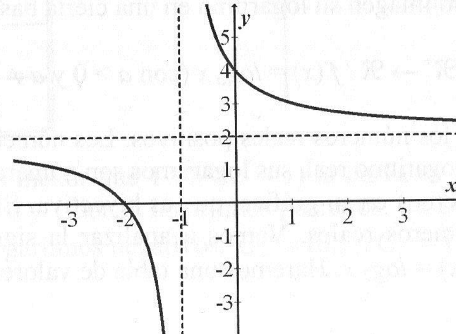
Esta función tiene 2 asíntotas (rectas a las cuales la función se aproxima), una vertical en $x = -\dfrac{d}{c}$ y una horizontal en $y = \dfrac{a}{c}$.

La intersección con el eje x se obtiene haciendo $ax + b = 0 \Rightarrow x_1 = -\dfrac{b}{a}$.

La intersección con el eje y se obtiene haciendo $x = 0 \Rightarrow y_1 = \dfrac{b}{d}$. La representación gráfica de una función homográfica es una hipérbola equilátera.

Ejemplo: $f: \Re - \{-1\} \to \Re \,/\, f(x) = \dfrac{2x+4}{x+1}$ $\qquad$ $\text{Im} f = \Re - \{2\}$

Una representación gráfica aproximada se puede obtener a partir de las asíntotas y de las intersecciones con los ejes coordenados. La asíntota vertical está en $x = -1$ y la horizontal en $y = 2$. La intersección con el eje x se obtiene haciendo $2x + 4 = 0 \Rightarrow x_1 = -2$. La intersección con el eje y se obtiene haciendo $x = 0 \Rightarrow y_1 = 4$.



Se ve gráficamente que esta función de $\Re \to \Re$ es inyectiva pero no sobreyectiva porque el 2 no es imagen de nadie. Para que sea biyectiva consideramos la restricción:

$$g^*: \Re - \{-1\} \to \Re - \{2\} \;/\; g^*(x) = \frac{2x+4}{x+1}.$$

$$C_+ = (-\infty;-2) \cup (-1;+\infty) \qquad C_- = (-2;-1)$$

Nota: toda función de la forma $(x + p).(y + q) = k$ se la puede llevar a la forma $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

Ejemplo: $(x + 12).(y + 6) = 169 \Rightarrow y = \dfrac{169}{x+12} - 6 \;\therefore\; f(x) = \dfrac{-6x+97}{x+12}$

LA FUNCIÓN LOGARITMO

Definición

Recordemos que el logaritmo en base a ($a > 0$ y $a \neq 1$) de un número b ($b > 0$) es el exponente $\boldsymbol{x}$ al que hay que elevar la base a para obtener el número b.

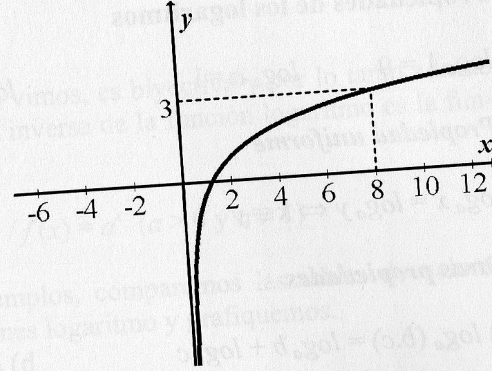
$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

La ***función logaritmo*** es una función que a cada número le hace corresponder como imagen su logaritmo en una cierta base.

$$f: \Re^+ \to \Re \;/\; f(x) = \log_a x \text{ (con } a > 0 \text{ y } a \neq 1).$$

El dominio son los números reales positivos. Los números reales negativos no tienen logaritmo real, sus logaritmos son números complejos. La función, veremos en su gráfica, que es biyectiva. El conjunto imagen son los números reales. Vamos a analizar la siguiente función: $f: \Re^+ \to \Re \;/\; f(x) = \log_2 x$. Haremos una tabla de valores y luego graficaremos.

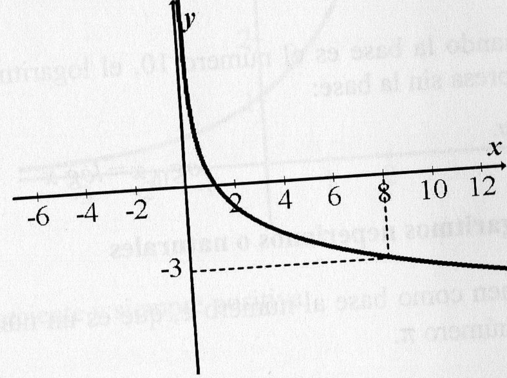
x	y
1	0
2	1
4	2
8	3
1/2	-1
1/4	-2



Si la base a es mayor que 1 ($a > 1$) la curva es creciente. Los números entre 0 y 1 tienen logaritmos negativos, los números mayores que 1 tienen logaritmos positivos. $C_+ = (1;+\infty)$, $C_- = (0;1)$. El cero es $x_1=1$.

Analizamos ahora $f: \Re^+ \to \Re \;/\; f(x) = \log_{1/2} x$

x	y
1	0
2	-1
4	-2
8	-3
½	1
¼	2



Si la base a es menor que 1 ($0 < a < 1$) la curva es decreciente. Los números entre 0 y 1 tienen logaritmos positivos, los números mayores que 1 tienen logaritmos negativos. $C_+ = (0;1)$, $C_- = (1;+\infty)$,

Cero: $x_1=1$.

La función logaritmo tiene una asíntota vertical en $x = 0$.

Propiedades de los logaritmos

$log_a 1 = 0$ $\quad log_a a = 1$ $\quad log_a a^n = n$

Propiedad uniforme

$log_a x = log_a y \Leftrightarrow x = y$

Otras propiedades

a) $log_a (b.c) = log_a b + log_a c$

b) $log_a (b:c) = log_a b - log_a c$

c) $log_a b^n = n.\ log_a b$

d) $log_a \sqrt[n]{b} = \dfrac{log_a b}{n}$

e) $log_{b^n} a^n = log_b a$

f) $a^{log_a x} = x$

siempre y cuando éstos existan.

Logaritmos decimales

Cuando la base es el número 10, el logaritmo se llama decimal y se expresa sin la base:

$$log_{10} x = log\ x$$

Logaritmos neperianos o naturales

Tienen como base al número **e**, que es un número irracional, del tipo del número π.

Dicho número es aproximadamente igual a 2,7182.

Dichos logaritmos se expresan de la siguiente manera: $log_e x = ln\ x$.

FUNCIÓN EXPONENCIAL

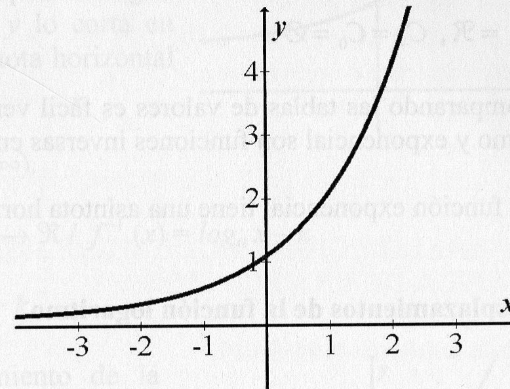
La función logaritmo, como vimos, es biyectiva y por lo tanto admite función inversa. La función inversa de la función logaritmo es la función exponencial.

$$f: \Re \to \Re^+ / f(x) = a^x \ (a > 0 \text{ y } a \neq 1)$$

Veamos los siguientes ejemplos, comparemos las tablas de valores con las tablas de las funciones logaritmo y grafiquemos.

$f: \Re \to \Re^+ / f(x) = 2^x$

x	y
0	1
1	2
2	4
3	8
-1	½
-2	¼



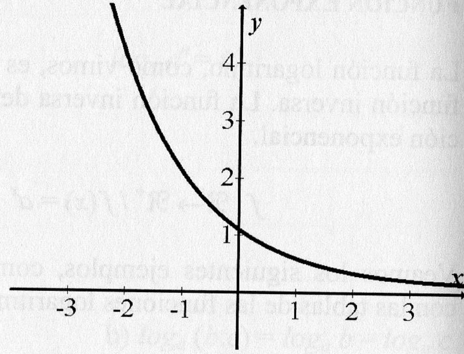
Si ***a*** **>1** la función es creciente y siempre positiva,

$C_+ = \Re,\ C_- = C_0 = \varnothing$.

Analicemos ahora el siguiente ejemplo:

$f: \Re \to \Re^+ / f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

x	y
0	1
1	½
2	¼
3	1/8
-1	2
-2	4



Si $0 < \boldsymbol{a} < \mathbf{1}$ la función es decreciente y siempre positiva.

$C_+ = \Re$, $C_- = C_0 = \varnothing$.

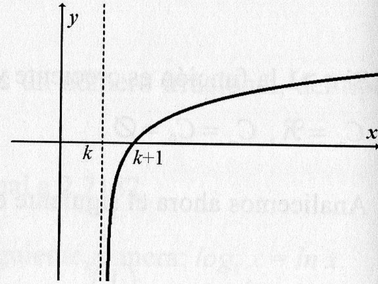
Comparando las tablas de valores es fácil ver que las funciones logaritmo y exponencial son funciones inversas entre sí.

La función exponencial tiene una asíntota horizontal en $y = 0$.

Desplazamientos de la función logaritmo

a) $f: (k\,;\infty) \to \Re \,/\, f(x) = log_a\,(x - k)$

Tenemos un desplazamiento de la función $log_a\, x$. El desplazamiento será hacia la derecha o hacia la izquierda según $k > 0$ o $k < 0$. Tiene una asíntota vertical en $x = k$. El cero es $x_1 = k + 1$. Es biyectiva, su inversa es $f^{-1}: \Re \to (k;+\infty) \,/\, f^{-1}(x) = a^x + k$.



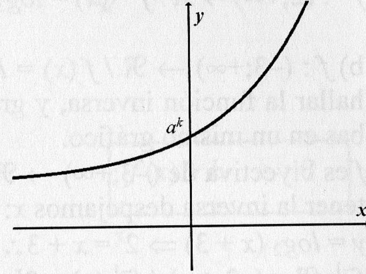
b) $f: \Re^+ \to \Re \,/\, f(x) = log_a\, x + k$

Tenemos otro desplazamiento de la función $log_a\, x$. El desplazamiento será hacia arriba o hacia abajo según $k > 0$ o $k < 0$. La asíntota vertical sigue siendo $x = 0$. El cero es $x_1 = a^{-k}$. Es biyectiva, su inversa es $f^{-1}: \Re \to (k;+\infty) \,/\, f^{-1}(x) = a^{x-k}$.

Desplazamientos de la función exponencial

a) $f: \Re \to \Re \,/\, f(x) = a^{x+k}$

Tenemos un desplazamiento de la función a^x. El desplazamiento será hacia la derecha o hacia la izquierda según $k > 0$ o $k < 0$. Al eje y lo corta en $y_1 = a^k$. Tiene como asíntota horizontal $y = 0$.

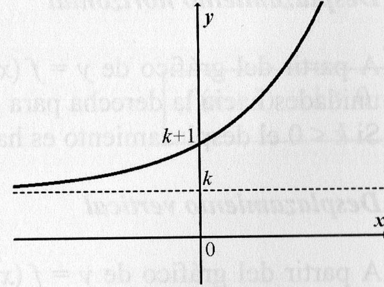


Es biyectiva de $\Re \to (0;+\infty)$.

Su inversa es $f^{-1}: (0;+\infty) \to \Re \,/\, f^{-1}(x) = log_a\, x - k$

b) $f: \Re \to \Re \,/\, f(x) = a^x + k$

Tenemos un desplazamiento de la función a^x. El desplazamiento será hacia arriba o hacia abajo según $k > 0$ o $k < 0$. Al eje y lo corta en $y_1 = k + 1$. Tiene una asíntota horizontal en $y = k$.

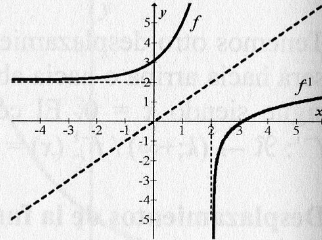


Es biyectiva de $\Re \to (k;+\infty)$.

Su inversa es $f^{-1}: (k;+\infty) \to \Re \,/\, f^{-1}(x) = log_a\,(x - k)$.

Ejemplos

a) $f : \Re \to \Re \,/\, f(x) = 3^x + 2$, indicar su imagen para que admita función inversa, hallarla y graficar ambas en un mismo gráfico.

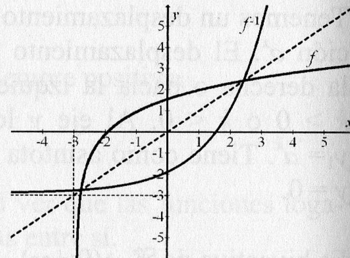


f es biyectiva de $\Re \to (2;+\infty)$, para obtener la inversa despejamos x:

$y = 3^x + 2 \Rightarrow y - 2 = 3^x \;\therefore\; x = log_3\,(y-2)$

$f^{-1}: (2;+\infty) \to \Re \,/\, f^{-1}(x) = log_3\,(x-2)$.

b) $f : (-3;+\infty) \to \Re \,/\, f(x) = log_2\,(x+3)$, hallar la función inversa, y graficar ambas en un mismo gráfico.



f es biyectiva de $(-3;+\infty) \to \Re$, para obtener la inversa despejamos x:

$y = log_2\,(x+3) \Rightarrow 2^y = x + 3 \;\therefore\; x = 2^y - 3$

$f^{-1}: \Re \to (-3;+\infty) \,/\, f^{-1}(x) = 2^x - 3$.

GENERALIZACIÓN DEL DESPLAZAMIENTO DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

Desplazamiento horizontal

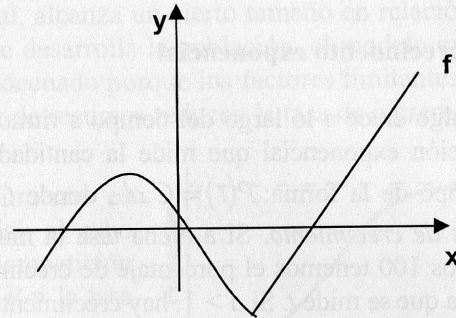
A partir del gráfico de $y = f(x)$ se considera un desplazamiento de k unidades hacia la derecha para efectuar el gráfico de $f(x-k)$ con $k > 0$. Si $k < 0$ el desplazamiento es hacia la izquierda.

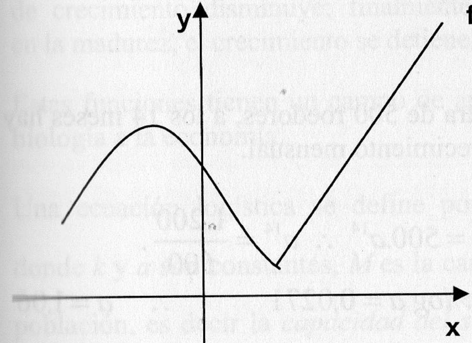
Desplazamiento vertical

A partir del gráfico de $y = f(x)$ se considera un desplazamiento de k unidades hacia arriba para efectuar el gráfico de $f(x) + k$ con $k > 0$. Si $k < 0$ el desplazamiento es hacia la abajo.

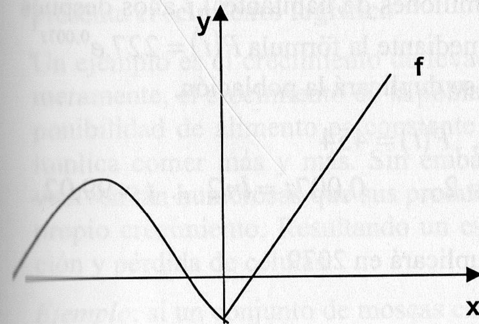
Ejemplos

Dada la gráfica de $y = f(x)$





$f(x) + k \quad k > 0$



$f(x-k) \quad k > 0$

APLICACIONES DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

El crecimiento exponencial

Si algo crece a lo largo del tiempo a ritmo constante tiene asociada una función exponencial que mide la cantidad de unidades en función del tiempo de la forma: $P(t)=C.a^t$, donde C es la cantidad inicial y a la *tasa de crecimiento.* Si a dicha tasa la multiplicamos por 100 y le restamos 100 tenemos el porcentaje de crecimiento en la unidad de tiempo en la que se mide t. Si $a>1$, hay crecimiento, si $a<1$, hay decrecimiento.

Ejemplos

a) Inicialmente hay una muestra de 500 roedores, a los 14 meses hay 1.200. Calcular la tasa de crecimiento mensual.

$$P(t)=C.a^t \Rightarrow \quad 1.200=500.a^{14} \;\therefore\; a^{14}=\frac{1.200}{500}.$$

$$14.log\, a=log\,12-log\,5 \Rightarrow log\, a=0{,}0271 \qquad \therefore \quad a=1{,}06$$

Por lo tanto la tasa de crecimiento mensual es del 6%.

b) La población de EEUU (en millones de habitantes) t años después de 1980 se puede aproximar mediante la fórmula $P(t)=227.e^{0{,}007t}$.

Determinar en cuánto tiempo se duplicará la población.

Buscamos para que valor de t, $P(t)=454$

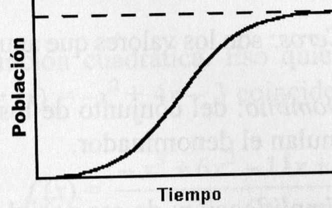
$$454=227.e^{0{,}007t} \Rightarrow \quad e^{0{,}007t}=2. \qquad 0{,}007t=ln2 \;\therefore\; t=99{,}02.$$

Por lo tanto la población se duplicará en 2079.

La Curva logística

La curva logística o curva en forma de S modeliza la *función sigmoidea* de crecimiento de un conjunto P. Es una función matemática que aparece en diversos modelos, puede ser crecimiento de poblaciones, propagación de enfermedades epidémicas y difusión en redes sociales.

Cuando la población, cuyo crecimiento pretende ser estudiado mediante el modelo exponencial, alcanza un cierto tamaño en relación al ambiente ecológico donde se desarrolla la población, el modelo exponencial puede dejar de ser adecuado porque los factores limitantes del crecimiento como la escasez de recursos reducen la tasa de incremento de la población.



El estadio inicial de crecimiento es aproximadamente exponencial; al cabo de un tiempo, aparece la competición entre algunos miembros de P y la tasa de crecimiento disminuye; finalmente, en la madurez, el crecimiento se detiene.

Estas funciones tienen un campo de aplicación muy amplio, desde la biología a la economía.

Una ecuación logística se define por la fórmula: $P(t)=\dfrac{M}{1+k.a^t}$,

donde k y a son constantes, M es la cantidad en la cual se estabiliza la población, es decir la *capacidad del sistema* y $\dfrac{M}{1+k}$ es la población correspondiente a $t=0$.

Una magnitud que crece de acuerdo con esa expresión se dice que presenta **crecimiento logístico**

Un ejemplo es el crecimiento de levadura en el fermento del pan. Primeramente, el crecimiento de la población es casi exponencial. La disponibilidad de alimento es constante y como la población crece esto implica comer más y más. Sin embargo, las células de levaduras se vuelven tan numerosas que sus productos comienzan a interferir con el propio crecimiento. Resultando un estado de equilibrio entre producción y pérdida de células.

Ejemplo: si un conjunto de moscas crece en una isla según la ley:

$P(t)=\dfrac{600.000}{1+599.0{,}98^t}$, vemos que inicialmente hay 1.000 y que la población es estabiliza en 600.000. También podemos calcular que en 10 años habrá 1221 moscas.

Funciones Racionales

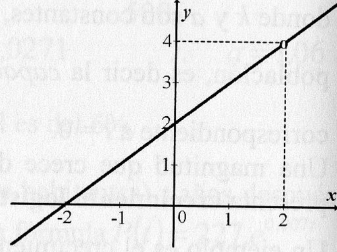
Las funciones racionales tienen la siguiente expresión: $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ con $q(x) \neq 0$. Tenemos un cociente de polinomios.

Ceros: son los valores que anulan el numerador, pero ***no*** el denominador.

Dominio: del conjunto de los números reales debemos excluir los que anulan el denominador.

Simplificación: de ser posible la función se puede simplificar, para lo cual se deben factorear los polinomios. En este caso se obtiene una nueva función ya que el dominio no es el mismo y la ecuación tampoco. A los valores de x que pertenecen al dominio de la nueva función pero no al de la original le corresponde en el gráfico un ***agujero***.

Ejemplos



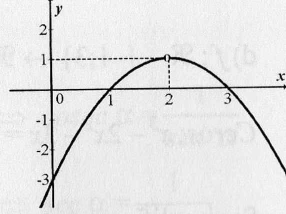
a) $f: \Re - \{2\} \rightarrow \Re \,/\, f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$

Ceros: $x^2 - 4 = 0 \ \wedge x - 2 \neq 0 \Rightarrow x_1 = -2$

Si simplificamos tenemos:

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2).(x+2)}{x-2} = x+2 = g(x) \quad \forall x \neq 2$$

Vemos que la nueva función es una función lineal. Eso quiere decir que $\forall x \neq 2$ la función lineal $g(x) = x + 2$ coincide con la función racional. Por lo tanto la representación gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ es la recta $g(x) = x + 2$ con un agujero en $x = 2$.



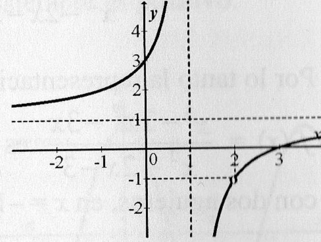
b) $f: \Re - \{2\} \rightarrow \Re \,/\, f(x) = \dfrac{-x^3+6x^2-11x+6}{x-2}$

$$f(x) = \frac{-(x-1).(x-3).(x-2)}{x-2}$$

$$= -x^2 + 4x - 3 = g(x) \quad \forall x \neq 2$$

Vemos que la nueva función es una función cuadrática. Eso quiere decir que $\forall x \neq 2$ la función cuadrática $g(x) = -x^2 + 4x - 3$ coincide con la función racional.

Por lo tanto la representación gráfica de $f(x) = \dfrac{-x^3+6x^2-11x+6}{x-2}$ es la parábola $g(x) = -x^2 + 4x - 3$, con un agujero en $x = 2$.



c) $f: \Re - \{1;2\} \rightarrow \Re \,/\, f(x) = \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$

Ceros: $x^2 - 5x + 6 = 0 \ \wedge x^2 - 3x + 2 \neq 0$
$\Rightarrow x_1 = 3$.

Si simplificamos tenemos:

$$f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2} = \frac{(x-2).(x-3)}{(x-2).(x-1)} = \frac{x-3}{x-1} = g(x) \quad \forall x \neq 2$$

Vemos que la nueva función es una función homográfica. Eso quiere decir que $\forall x \neq 2$ la función homográfica $g(x) = \dfrac{x-3}{x-1}$ coincide con la función $f(x) = \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$.

Por lo tanto la representación gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$ es la hipérbola de ecuación $g(x) = \dfrac{x-3}{x-1}$ con un agujero en $x = 2$.

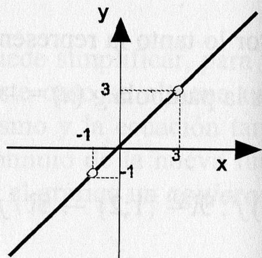
d) $f: \Re - \{-1;3\} \to \Re \,/\, f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - 3x}{x^2 - 2x - 3}$

Ceros: $x^3 - 2x^2 - 3x = 0 \;\wedge\; x^2 - 2x - 3 \neq 0 \Rightarrow x_1 = 0$.

Si simplificamos tenemos: $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - 3x}{x^2 - 2x - 3} = \dfrac{x.(x+1).(x-3)}{(x+1).(x-3)} = x =$

$= g(x)\ \forall x \notin \{-1;3\}$

Vemos que la nueva función es una función lineal. Eso quiere decir que $\forall x \notin \{-1;3\}$ la función lineal $g(x) = x$ coincide con la función $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - 3x}{x^2 - 2x - 3}$.



Por lo tanto la representación gráfica de

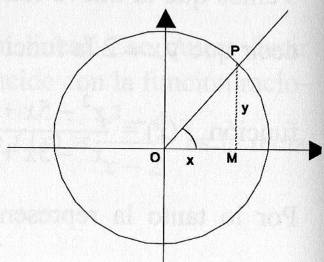
$f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - 3x}{x^2 - 2x - 3}$ es la recta $g(x) = x$

con dos agujeros, en $x = -1$ y $x = 3$.

Funciones Trigonométricas

Consideramos una circunferencia de centro O y radio que denominamos ρ (radiovector). Consideramos un punto de la misma P = $(x;y)$. Trazamos por P la perpendicular al eje x que corta al mismo en M, queda definido el triángulo rectángulo OMP de lados de longitud x, y, ρ.

Efectuando los cocientes entre las medidas de sus lados definimos las siguientes funciones que se denominan funciones trigonométricas del ángulo α:

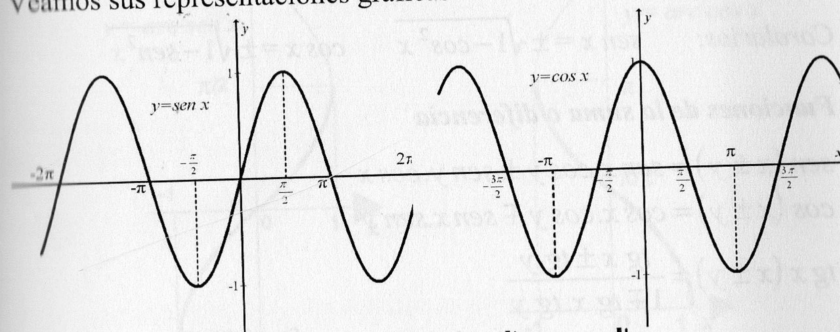


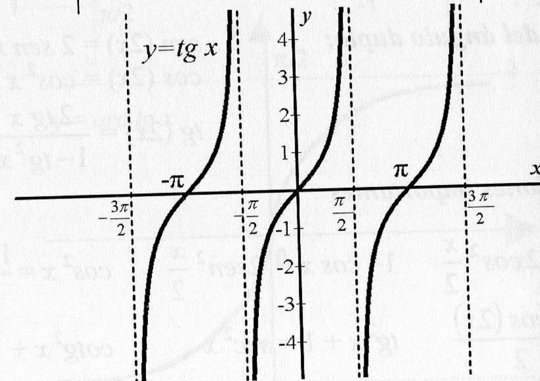
Directas	Recíprocas	
$sen\ \alpha = \dfrac{y}{\rho}$	$cosec\ \alpha = \dfrac{\rho}{y}$	$\Rightarrow cosec\ \alpha = \dfrac{1}{sen\ \alpha}$
$cos\ \alpha = \dfrac{x}{\rho}$	$sec\ \alpha = \dfrac{\rho}{x}$	$\Rightarrow sec\ \alpha = \dfrac{1}{cos\ \alpha}$
$tg\ \alpha = \dfrac{y}{x}$	$cotg\ \alpha = \dfrac{x}{y}$	$\Rightarrow cotg\ \alpha = \dfrac{1}{tg\ \alpha}$

De estas definiciones surge que: $tg\ \alpha = \dfrac{sen\ \alpha}{\cos\ \alpha}$ y que $cotg\ \alpha = \dfrac{\cos\ \alpha}{sen\ \alpha}$

Nota: los signos de las funciones dependen de los signos de x e y en cada cuadrante. **ρ**, por convención, siempre es positivo.

Veamos sus representaciones gráficas





Analizamos sus dominios e imágenes:

$f: \Re \to \Re \,/\, f(x) = sen\, x$ $\qquad \operatorname{Im} f = [-1;1]$

Ceros: $x = k\pi \quad k \in Z$ $\quad$ Es impar es biyectiva de $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right] \to [-1;1]$

$f: \Re \to \Re \,/\, f(x) = cos\, x$ $\qquad \operatorname{Im} f = [-1;1]$

Ceros: $x = (2k+1).\dfrac{\pi}{2} \quad k \in Z$ $\quad$ Es par $\quad$ es biyectiva de $[0;\pi] \to [-1;1]$

$f: \Re - \left\{(2k+1).\dfrac{\pi}{2}, k \in Z\right\} \to \Re \,/\, f(x) = tg\, x$ $\qquad \operatorname{Im} f = \Re$

Ceros: $x = k\pi \quad k \in Z$ $\quad$ Es impar $\quad$ es biyectiva de $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right] \to \Re$

Recordamos las principales relaciones entre ellas.

Relación Pitagórica: $\quad sen^2 x + cos^2 x = 1$

Corolarios: $\quad sen\, x = \pm\sqrt{1-cos^2 x} \qquad cos\, x = \pm\sqrt{1-sen^2 x}$

Funciones de la suma o diferencia

$sen\,(x \pm y) = sen\,x.cos\,y \pm sen\,y.cos\,x$

$cos\,(x \pm y) = cos\,x.cos\,y \mp sen\,x.sen\,y$

$tg\,x\,(x \pm y) = \dfrac{tg\,x \pm tg\,y}{1 \mp tg\,x.tg\,y}$

Funciones del ángulo duplo:

$sen\,(2x) = 2\,sen\,x.cos\,x$

$cos\,(2x) = cos^2 x - sen^2 x$

$tg\,(2x) = \dfrac{2\,tg\,x}{1-tg^2 x}$

Otras relaciones importantes

$1 + cos\,x = 2cos^2\dfrac{x}{2} \qquad 1 - cos\,x = 2sen^2\dfrac{x}{2} \qquad cos^2 x = \dfrac{1+cos\,(2x)}{2}$

$sen^2 x = \dfrac{1-cos\,(2x)}{2} \qquad tg^2 x + 1 = sec^2 x \qquad cotg^2 x + 1 = cosec^2 x$

Funciones trigonométricas inversas

Hemos visto que, con ciertas restricciones, las funciones trigonométricas son biyectivas y por lo tanto admiten función inversa, dichas funciones reciben el nombre de ***arcos***.

La función inversa del seno es el ***arc sen*** (arco seno):

$f: [-1;1] \to \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right] \,/\, f(x) = arc\,sen\,x$

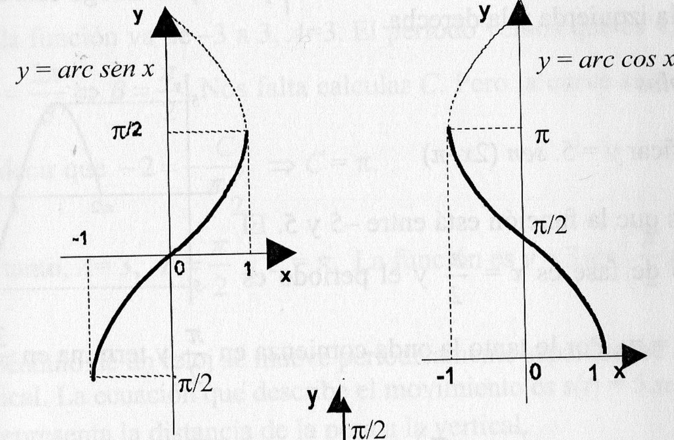
La función inversa del coseno es el ***arc cos*** (arco coseno):

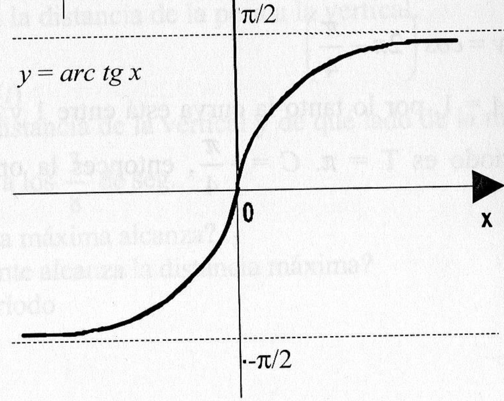
$f: [-1;1] \to [0;\pi] \,/\, f(x) = arc\,cos\,x$

La función inversa de la tangente es el ***arc tg*** (arco tangente):

$f: \Re \to \left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right) \,/\, f(x) = arc\,tg\,x$

Veamos sus gráficos.



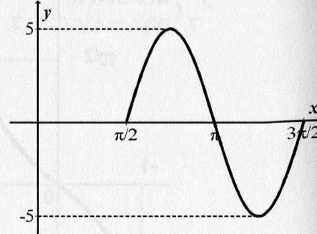


Generalización de las Funciones Seno y Coseno

Las funciones seno y coseno se pueden generalizar: $y = A.\, sen\,(Bx + C)$, $y = A.\, cos\,(Bx + C)$.
Obtenemos la senusoide y la cosenusoide desplazadas según los parámetros *A*, *B* y *C*. Veremos cómo afectan dichos parámetros a las curvas. ***A*** es la ***amplitud***, tanto las funciones seno como coseno toman valores en el intervalo [–1;1], al estar multiplicadas por el factor *A* toman valores en el intervalo [–*A*;*A*]. Como ya hemos visto ambas funciones son periódicas, ahora el período es $T=\dfrac{2\pi}{B}$, donde *B* es la ***pulsación***. Por último tenemos el ***ángulo de fase***, que es $x=-\dfrac{C}{B}$, es el ángulo donde se inicia la onda. Si a ese valor le sumamos el período tenemos el intervalo donde está la ***onda principal***. Luego esta se repite hacia la izquierda y la derecha.

Ejemplos

a) graficar $y = 5.\, sen\,(2x–\pi)$

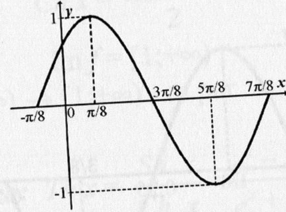


Vemos que la función está entre –5 y 5. El ángulo de fase es $x=\dfrac{\pi}{2}$ y el período es $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$. Por lo tanto la onda comienza en $\dfrac{\pi}{2}$ y termina en $\dfrac{3\pi}{2}$.

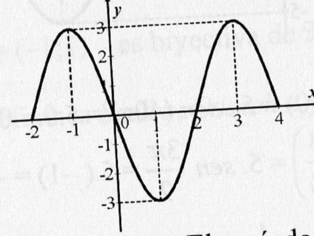
b) graficar $y=cos\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

vemos que *A* = 1, por lo tanto la curva está entre 1 y –1. *B* =2, por lo tanto el período es T = π. $C=-\dfrac{\pi}{4}$, entonces la onda se inicia en $x=-\dfrac{\pi}{8}$.

La gráfica es:



c) Si $y=A.sen\left(Bx+C\right)$ y la gráfica es la siguiente, hallar *A*, *B* y *C*



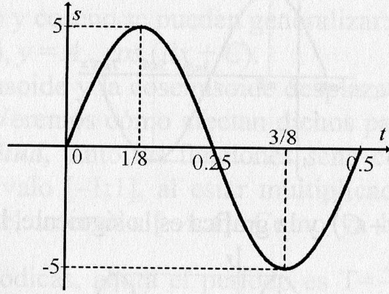
Como la función va de –3 a 3, *A*=3. El período vemos que es 4, por lo tanto $4=\dfrac{2\pi}{B}\Rightarrow B=\dfrac{\pi}{2}$. Nos falta calcular *C*. Pero la curva se inicia en –2, es decir que $-2=-\dfrac{C}{\pi/2}\Rightarrow C=\pi$.

Por lo tanto, *A*= 3, $B=\dfrac{\pi}{2}$ y $C=\pi$. La función es $y=3sen\left(\dfrac{\pi}{2}x+\pi\right)$.

d) El péndulo de un reloj se mueve periódicamente separándose *s* cm de la vertical. La ecuación que describe el movimiento es $s(t) = 5.sen\,(4\pi t)$. $|s(t)|$ representa la distancia de la pesa a la vertical.

i) representar *s* (*t*)
ii) decir a qué distancia de la vertical y de qué lado de la misma estará a los 10 seg y a los $\dfrac{3}{8}$ de seg.
iii) qué distancia máxima alcanza?
iv) en qué instante alcanza la distancia máxima?
v) indicar el período

i) ya vimos como se representa este tipo de funciones:



ii) $s\,(10) = 5.\,sen\,(4\pi\,.10) = 5\,.\,sen\,(40\pi) = 5.0 = 0$

$s\left(\dfrac{3}{8}\right) = 5.\,sen\left(4\pi.\dfrac{3}{8}\right) = 5.\,sen\,\dfrac{3\pi}{2} = 5.(-1) = -5$

a los 10 segundos está en la posición vertical, a los 3/8 de seg está a 5 cm en sentido contrario.

iii) la máxima distancia es 5 cuando el $sen\,(4\pi\,t) = 1$

iv) la máxima distancia la alcanza cuando el $sen\,(4\pi t)$ vale 1 o –1, es decir que $4\pi\,t = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{8}$ de seg., y $4\pi\,t = \dfrac{3\pi}{2} \Rightarrow t = \dfrac{3}{8}$ de seg.

v) El período es $T = \dfrac{2\,\pi}{B} = \dfrac{2\,\pi}{4\,\pi} = 0{,}5$.

FUNCIONES HIPERBÓLICAS

Definimos las funciones hiperbólicas a partir de la función exponencial $h\,(x) = e^x$.

Seno hiperbólico: $Sh\,x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ $f: \Re \to \Re\,/\,f(x) = Sh\,x$

Ceros: $x = 0$ $\quad \text{Im}\,f = \Re$ $\quad$ es biyectiva de $\Re \to \Re$ $\quad$ es impar

Coseno hiperbólico: $Ch\,x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ $f: \Re \to \Re\,/\,f(x) = Ch\,x$

Ceros: no tiene $\quad \text{Im}\,f = [1;+\infty)$

es biyectiva de $[0;+\infty) \to [1;+\infty)$ es par

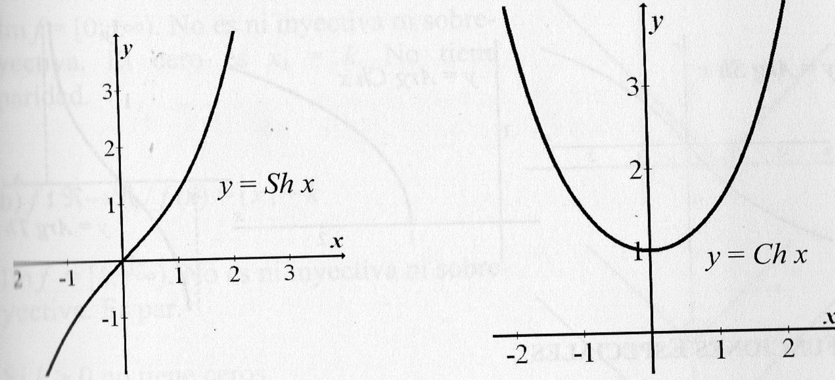
Tangente hiperbólica: $Th\,x = \dfrac{Sh\;x}{Ch\;x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

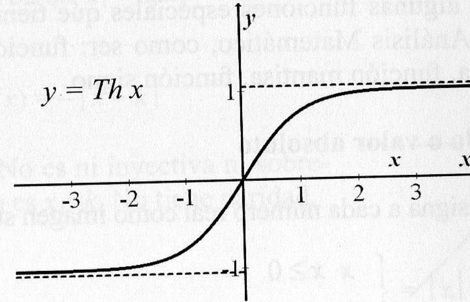
$f: \Re \to \Re\,/\,f(x) = Th\,x$

Ceros: $x = 0$ $\quad \text{Im}\,f = (-1;1)$ $\quad$ es biyectiva de $\Re \to (-1;1)$ es impar

También se pueden definir la *Sech x*, *Cosech x* y la *Coth x*.

Veamos sus gráficos:





Relaciones fundamentales entre ellas:

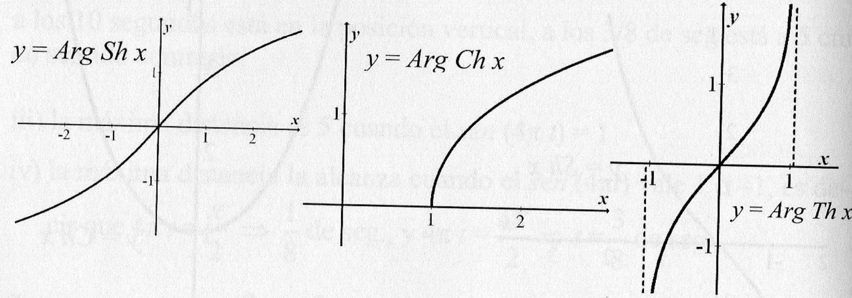
$Ch^2\,x - Sh^2\,x = 1$ $\qquad$ $Ch^2\,x + Sh^2\,x = Ch\,(2x)$

$2\,Sh\,x\,.\,Ch\,x = Sh\,(2x)$ $\qquad$ $Sech^2\,x + Th^2\,x = 1$

Funciones hiperbólicas inversas: los argumentos

Vimos que las funciones hiperbólicas, a veces con restricciones, son biyectivas. Por lo tanto a cada función hiperbólica le corresponde una función inversa que se denomina ***Argumento***.
Así la función inversa del *Sh x* es el *Arg Sh x* (Argumento del seno hiperbólico). La del *Ch x* es el *Arg Ch x* (Argumento del coseno hiperbólico) y la de la *Th* es *Arg Th x* (Argumento de la tangente hiperbólica).

Arg Sh x: $\Re \to \Re$ $\quad$ *Arg Ch x*: $[1;+\infty) \to [0;+\infty)$ $\quad$ *Arg Th x*: $(-1;1) \to \Re$



FUNCIONES ESPECIALES

Veremos ahora algunas funciones especiales que tienen muchas aplicaciones en el Análisis Matemático, como ser: función módulo, función parte entera, función mantisa, función signo.

Función módulo o valor absoluto

Esta función le asigna a cada número real como imagen su valor absoluto.

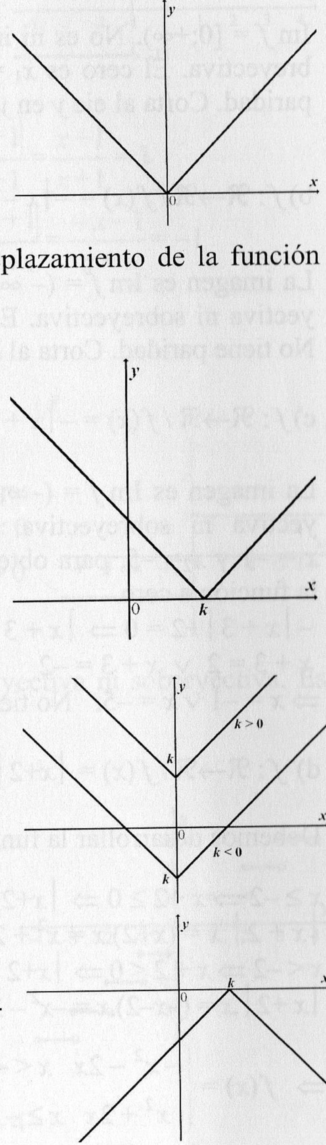
$$f: \Re \to \Re \,/\, f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

Si el número es positivo o cero, su imagen es igual a sí mismo, si es negativo su imagen es su opuesto.

Ejemplos: $|3| = 3$ $\quad |-4| = 4$ $\quad |0| = 0$

Veamos su representación gráfica:

Im $f = [0;+\infty)$. No es ni inyectiva ni sobreyectiva. El cero es $x_1 = 0$. Es par.



Veamos algunas variantes a partir del desplazamiento de la función base:

a) $f: \Re \to \Re \,/\, f(x) = |x - k|$

Im $f = [0;+\infty)$. No es ni inyectiva ni sobreyectiva. El cero es $x_1 = k$. No tiene paridad.

b) $f: \Re \to \Re \,/\, f(x) = |x| + k$

Im $f = [k;+\infty)$. No es ni inyectiva ni sobreyectiva. Es par.

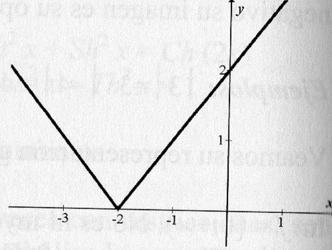
Si $k > 0$ no tiene ceros.
Si $k < 0$, tiene 2 ceros, $x_1 = k$, $x_2 = -k$

c) $f: \Re \to \Re \,/\, f(x) = -|x - k|$

Im $f = (-\infty;0]$. No es ni inyectiva ni sobreyectiva. El cero es $x_1 = k$. No tiene paridad.

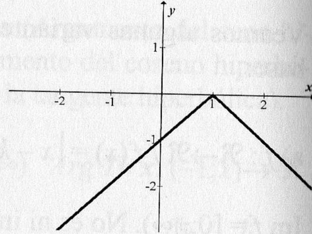
Ejemplos

a) $f: \Re \to \Re \,/\, f(x) = |x+2|$



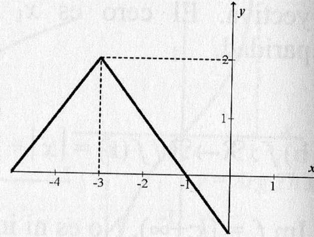
Im f = $[0;+\infty)$. No es ni inyectiva ni sobreyectiva. El cero es $x_1 = -2$. No tiene paridad. Corta al eje y en $y_1 = 2$.

b) $f: \Re \to \Re \,/\, f(x) = -|x-1|$



La imagen es Im $f = (-\infty;0]$. No es ni inyectiva ni sobreyectiva. El cero es $x_1 = 1$. No tiene paridad. Corta al eje y en $y_1 = -1$.

c) $f: \Re \to \Re \,/\, f(x) = -|x+3|+2$



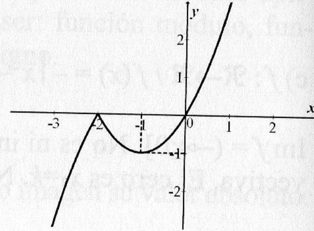
La imagen es Im $f = (-\infty;2]$. No es ni inyectiva ni sobreyectiva. Los ceros son $x_1 = -1$ y $x_2 = -5$, para obtenerlos se iguala la función a cero.

$-|x+3|+2 = 0 \Rightarrow |x+3| = 2$

$x+3 = 2 \;\vee\; x+3 = -2$

$\Rightarrow x = -1 \vee x = -5$. No tiene paridad.

d) $f: \Re \to \Re \,/\, f(x) = |x+2|\,x$



Debemos desarrollar la función, si:

$x \geq -2 \Rightarrow x+2 \geq 0 \Rightarrow |x+2| = x+2$

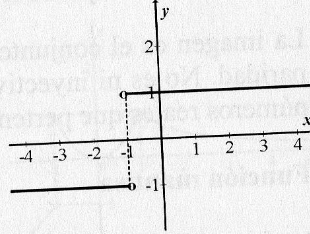
$|x+2|.x = (x+2).x = x^2 + 2x$

$x < -2 \Rightarrow x+2 < 0 \Rightarrow |x+2| = -x-2$

$|x+2|.x = (-x-2).x = -x^2 - 2x$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x & x < -2 \\ x^2 + 2x & x \geq -2 \end{cases}$$

e) $f: \Re - \{-1\} \to \Re \,/\, f(x) = \dfrac{|x+1|}{x+1}$



Debemos desarrollar la función, si:

$x > -1 \Rightarrow x+1 > 0 \Rightarrow |x+1| = x+1 \Rightarrow \dfrac{|x+1|}{x+1} = \dfrac{x+1}{x+1} = 1$

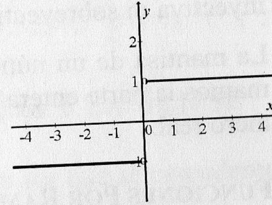
$x < -1 \Rightarrow x+1 < 0 \Rightarrow |x+1| = -x-1 \Rightarrow \dfrac{|x+1|}{x+1} = \dfrac{-x-1}{x+1} = -1$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} -1 & x < -1 \\ 1 & x > -1 \end{cases}$$

Función signo

Esta función se define de la siguiente manera:

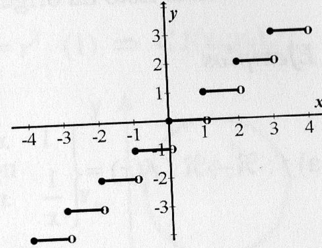
$$f: \Re - \{0\} \to \Re \,/\, f(x) = sg\,x = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$



Im $f = \{-1;1\}$, no tiene ceros, no es ni inyectiva ni sobreyectiva. Es impar.

Función parte entera

Se llama parte entera de un número real x, ***ent (x)***, al menor número entero entre los cuales está comprendido si x no es un número entero, y al mismo número entero si x es entero.



$f: \Re \to \Re \,/\, f(x) = ent\,(x)$

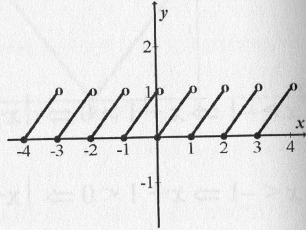
Ejemplos: $ent\,(1{,}3) = 1$ $\quad$ $ent\,(-3{,}4) = -4$

$ent\,(2) = 2$ $\quad$ $ent\,(-1{,}4) = -2$ $\quad$ $ent\,(-5) = -5$

La imagen es el conjunto de los números enteros, Im $f = Z$. No tiene paridad. No es ni inyectiva ni sobreyectiva. Tiene por ceros todos los números reales que pertenecen al intervalo [0;1).

Función mantisa

La función mantisa se define de la siguiente forma:



$f: \Re \to \Re \,/\, f(x) = \text{mant } x = x - \text{ent }(x)$

Ejemplos: mant (2,6) = 2,6 – 2 = 0,6
mant (–1,7) = –1,7 – (–2) = 0,3
mant (3) = 3 – 3 = 0

Vemos que la imagen es el intervalo [0;1). No tiene paridad, no es ni inyectiva ni sobreyectiva. Los números enteros tienen mantisa 0.

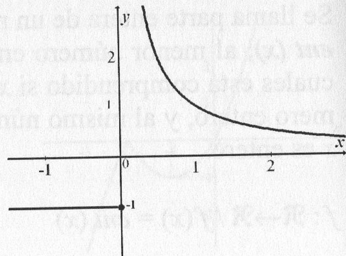
La mantisa de un número real es la parte decimal del número. Si sumamos la parte entera de un número más la mantisa, obtenemos el número real.

FUNCIONES POR RAMAS

A veces las funciones no se definen de la misma forma para todos los elementos de su dominio, para algunos valores de x la imagen se obtiene de una manera, y para otros valores de x la imagen de obtiene de otra manera. Esto da origen a las llamadas ***funciones por ramas***.

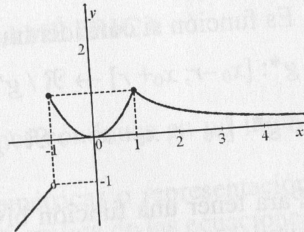
Ejemplos

a) $f: \Re \to \Re \,/\, f(x) = \begin{cases} 1 & x \le 0 \\ \dfrac{1}{x} & x > 0 \end{cases}$



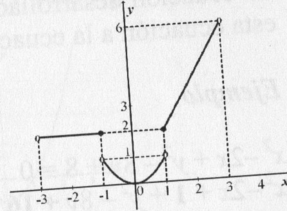
A la izquierda del 0 tenemos una función constante, a la derecha una homográfica. Im $f = (0;+\infty)$.

b) $f: \Re \to \Re \,/\, f(x) = \begin{cases} x & x < -1 \\ x^2 & -1 \le x \le 1 \\ \dfrac{1}{x} & x > 1 \end{cases}$



Tenemos una semirrecta para $x < -1$, un arco de parábola entre –1 y 1 y un arco de hipérbola para $x > 1$. Im $f = [0;1] \cup (-\infty;-1)$

c) $f: (-3;3) \to \Re \,/\, f(x) = \begin{cases} 2 & -3 < x \le -1 \\ x^2 & -1 < x < 1 \\ 2x & 1 \le x < 3 \end{cases}$



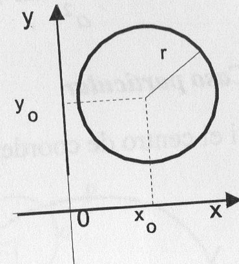
Im $f = [0;1) \cup [2;6)$

OTRAS CURVAS – LA CIRCUNFERENCIA Y LA ELIPSE

Estas dos curvas no representan funciones, a no ser que se consideren restricciones de ellas.

La circunferencia

La ecuación canónica de una circunferencia con centro en el punto $P_0 = (x_0;y_0)$ y radio ***r*** es: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ (1) $\Rightarrow$ C $[(x_0;y_0);r]$



g: $[x_0 - r;\, x_0 + r] \to \Re \,/$
$g(x) = \pm\sqrt{r^2 - (x - x_0)^2} + y_0$ no es función por el doble signo de la raíz.

Es función si consideramos,

$g^*: [x_0-r; x_0+r] \rightarrow \Re \,/\, g^*(x) = +\sqrt{r^2-(x-x_0)^2} + y_0$

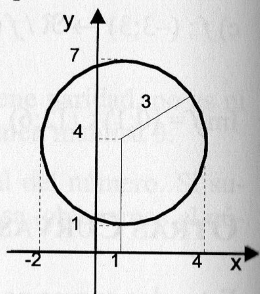
o $g^*: [x_0-r; x_0+r] \rightarrow \Re \,/\, g^*(x) = -\sqrt{r^2-(x-x_0)^2} + y_0$

Para tener una función biyectiva debemos considerar, por ejemplo, la siguiente restricción:

$g^*: [x_0-r; x_0+r] \rightarrow [y_0; y_0+r] \,/\, g^*(x) = \sqrt{r^2-(x-x_0)^2} + y_0$

La ecuación desarrollada es $x^2 + Ax + y^2 + By + C = 0$. Para pasar de esta ecuación a la ecuación canónica se deben completar cuadrados.

Ejemplo



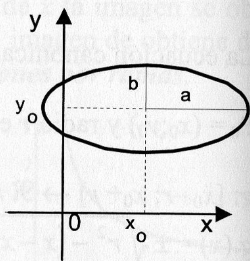
$x^2 - 2x + y^2 - 8y + 8 = 0$
$x^2 - 2x + \mathbf{1} + y^2 - 8y + \mathbf{16} + 8 = 17$
$(x-1)^2 + (y-4)^2 = 9 \Rightarrow$ C [(1;4);3],

Caso particular

Si el centro de coordenadas es (0;0) la ecuación queda: $x^2 + y^2 = r^2$

La elipse

La ecuación canónica de una elipse con centro en el punto $P_0 = (x_0;y_0)$ y semiejes ***a*** y ***b*** es:



$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

Caso particular

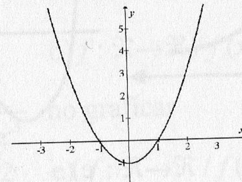
Si el centro de coordenadas es (0;0) la ecuación queda: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

CURVAS DEFINIDAS EN FORMA PARAMÉTRICA

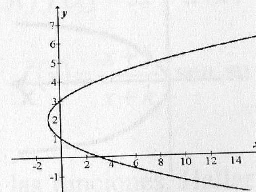
Las ecuaciones $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ con f y g funciones continuas en un intervalo, reciben el nombre de ecuaciones paramétricas o representación paramétrica de una curva en el plano XY. La gráfica de las ecuaciones paramétricas está dada por el conjunto de puntos en el plano XY que se obtienen asignando valores a t, que recibe el nombre de *parámetro*.

Veamos algunos ejemplos de curvas definidas en forma paramétrica:

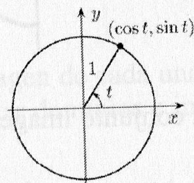
parábola vertical $\begin{cases} x = \dfrac{t}{2} \\ y = \dfrac{t^2}{4} - 1 \end{cases}$



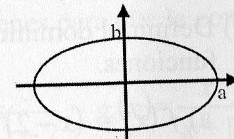
parábola horizontal $\begin{cases} x = t^2 - 2t \\ y = t + 1 \end{cases}$



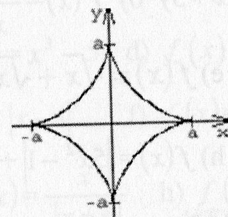
circunferencia $\begin{cases} x = cos\ t \\ y = sen\ t \end{cases}$



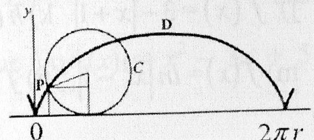
elipse $\begin{cases} x = a.cos\ t \\ y = b.sen\ t \end{cases}$



astroide $\begin{cases} x = a.cos^3\ t \\ y = b.sen^3\ t \end{cases}$



cicloide $\begin{cases} x = r.(t - sent) \\ y = r.(1 - cos\,t) \end{cases}$

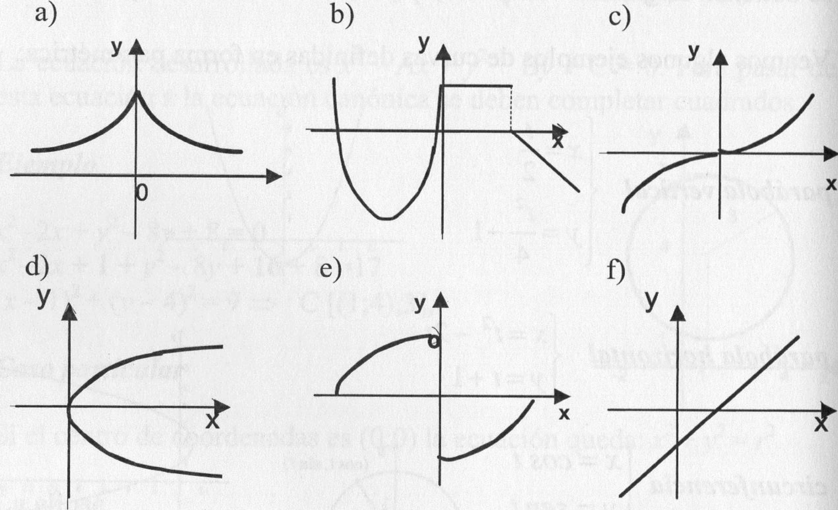


EJERCICIOS PROPUESTOS

1) Hallar.

a) $f(x+1)$ si $f(x-1) = 2x^2 + x$ b) $f\left(\frac{1}{x}\right)$ y $\frac{1}{f(x)}$ si $f(x) = \frac{x-1}{3x+5}$

2) Decir si las siguientes gráficas corresponden a funciones de $\Re \rightarrow \Re$. En caso afirmativo clasificarlas.



3) Definir el dominio, el conjunto imagen y los ceros de las siguientes funciones.

a) $f(x) = (x-2)^2.(x+3)$ b) $f(x)=\frac{x^2-16}{x-4}$ c) $g(x)=\frac{1}{x^2-x-6}$

d) $h(x)=\frac{x}{2-x}$ e) $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{x-2}$ f) $g(x)=x^{3/2}+1$

g) $f(x)=\frac{|x|}{x}$ h) $f(x)=|5x^2-1|+3$ i) $h(x)=x^2.\sqrt{x^6+9}$

j) $f(x)=3-|x+1|$ k) $h(x)=e^{5/2x}$ l) $f(x)=(1-sen\, x^2)^2$

m) $f(x)=ln|x^2-1|$ n) $f(x)=\sqrt{ln\sqrt{x}}$ o) $f(x)=\frac{1}{sen\,(5x-1)}$

4) Determinar el dominio, conjunto de positividad, de negatividad y ceros de las siguientes funciones.

a) $f(x) = x^2 + 8x + 12$ b) $f(x) = ln\,(1-x^2)$

c) $f(x) = \frac{1}{-x^2+2x+3}$ d) $f(x) = \frac{x+4}{x-2}$

5) Determinar si las siguientes funciones son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas. Restringir, cuando sea necesario, el dominio y la imagen para que las funciones sean biyectivas. Hallar las funciones inversas. Trazar, en un mismo gráfico, cada función con su inversa.

a) $f: \Re \rightarrow \Re / f(x) = x.(x-5)$ b) $f: \Re \rightarrow \Re / f(x) = \sqrt[3]{2x-4}$

c) $f: \Re - \{-\frac{1}{2}\} \rightarrow \Re / f(x) = \frac{1}{1+8x^3}$ no graficar

d) $f: \Re \rightarrow \Re / f(x) = x^2 + 8x + 12$ e) $f: \Re \rightarrow \Re / f(x) = e^x$

f) $f: \Re - \{1\} \rightarrow \Re / f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$ g) $f: \Re \rightarrow \Re / f(x) = 3x - 2|x|$

6) Determinar el valor de k para que la función $f(x)=\frac{x+5}{x+k}$ sea su propia inversa.

7) Determinar dominio e imagen de cada una de las funciones. Hallar $gof\,(x)$ y $fog\,(x)$, determinar dominios e imágenes para que la compuesta sea función.

a) $f(x)=4x+1;\ g(x)=x^2-1$ b) $f(x)=\frac{3}{x-2};\ g(x)=\frac{x}{x+1}$

c) $f(x)=\sqrt{x+5};\ g(x)=x^3-5$ d) $f(x)=\sqrt[3]{x-8};\ g(x)=ln\,x$

e) $f(x)=\frac{1}{x};\ g(x)=ln|x-1|$ f) $f(x)=e^{3x-1};\ g(x)=1+ln\,x$

g) $f(x)=x^3+x^2;\ g(x)=\frac{x}{|x+4|}$ h) $f(x)=x-1;\ g(x)=\frac{1}{cos\,x}$

8) Hallar f sabiendo que es lineal y que $gof\,(x) = x^2 - 3x + 5$ si $g(x) = x^2 + x + 3$.

9) Elegir la opción correcta:

A) La inversa de la función lineal que satisface:
$f(5) = 1$ y $f(-4) = -2$ es:

a) $f^{-1}(x) = 3x + 2$ b) $f^{-1}(x) = \frac{x}{3} - \frac{2}{3}$

c) $f^{-1}(x) = 2x - 5$ d) $f^{-1}(x) = 2x + 5$

B) Sean $f(x) = \ln x$ y $g(x) = x^2 - 1$, el dominio de $f \circ g\ (x)$ es:

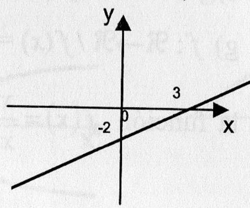
a) $[-1;1]$ b) $(0;+\infty)$ c) $(-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$ d) $(-1;1)$

10) Hallar la ecuación de la recta a partir de los siguientes datos. Graficar.

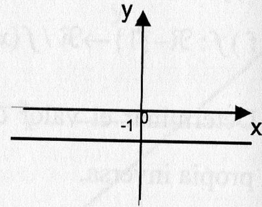
a) $P = (4;1);\ Q = (6;-2)$ b) $P = \left(\frac{1}{2}; 4\right);\ Q = \left(-\frac{3}{2}; 10\right)$

c) $m = -\frac{1}{2};\ P = \left(\frac{1}{4}; -\frac{3}{4}\right)$

d)



e)



f) Pasa por $P_0 = (1;2)$ y es paralela a $4x + 2y = 1$.

11) Hallar el valor de k para que se verifiquen las siguientes propiedades.

a) $kx + 3y = 1$ y $f(5) = 1$.

b) $y = -\frac{1}{7}x + \frac{k}{7}$; y abscisa al origen igual a $\frac{3}{2}$.

c) $x - ky + 3 = 0$; ordenada al origen -4.

d) $y = kx$; paralela a $3x - 7y = 12$.

12) Sea f la función lineal cuyo gráfico es la recta de pendiente 1 que pasa por $P_1 = (1;0)$ y g la función lineal cuyo gráfico es la recta que pasa por los puntos $P_2 = (0;5)$ y $P_3 = (3;-1)$. Determinar analíticamente el conjunto $A = \{x / f(x) = g(x)\}$.

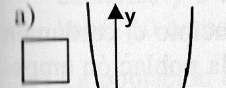
13) Hallar la ecuación de la recta perpendicular a $x + y = 2$ que pase por el vértice de $y = -(x-1)^2 + 2x - 2$. Verificar gráficamente.

14) Hallar las coordenadas del vértice, las raíces y graficar las siguientes funciones cuadráticas.

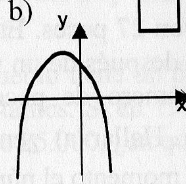
a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3$ b) $f(x) = -(x-1)^2 + 1$ c) $f(x) = -x^2 - \frac{3}{2}x + 1$

15) Dados los siguientes gráficos de funciones del tipo:
$f(x) = ax^2 + bx + c$, determine cuál de las condiciones dadas sobre a, b y c corresponde a cada uno. Completar el recuadro.

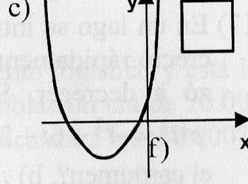
a)



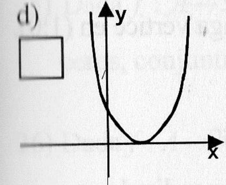
b)



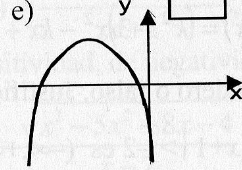
c)



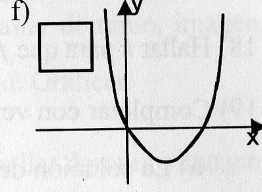
d)



e)



f)



i) $\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \\ c > 0 \\ b^2 - 4ac = 0 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \\ c > 0 \\ b^2 - 4ac < 0 \end{cases}$ iii) $\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \\ c = 0 \\ b^2 - 4ac > 0 \end{cases}$

iv) $\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ c > 0 \\ b^2 - 4ac > 0 \end{cases}$ v) $\begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \\ c < 0 \\ b^2 - 4ac > 0 \end{cases}$ vi) $\begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \\ c > 0 \\ b^2 - 4ac > 0 \end{cases}$

16) Graficar y determinar el conjunto imagen

a) $f(x)=\begin{cases} x+3 & x\leq 1 \\ -x^2 & x>1 \end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases} -x^2+1 & x<0 \\ 3 & 0\leq x<1 \\ 2x-1 & x\geq 1 \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} x^2 & x<-1 \\ 1 & -1\leq x\leq 1 \\ 2-x^2 & x>1 \end{cases}$ d) $f(x)=\begin{cases} -\frac{x^2}{5}+3 & -5\leq x<-2 \\ |x-1| & -2\leq x\leq 1 \\ \log x & x>1 \end{cases}$

17) En un lago se introdujeron 27 peces. En un principio el cardumen creció rápidamente pero después de un tiempo la población empezó a decrecer. Si el número de peces p (t) a los t años es $p(t)=-t^2+6t+27, t\geq 0$. Hallar: a) ¿en qué momento ser extingue el cardumen?, b) ¿en qué momento el número de peces es máximo?

18) Hallar k para que $f(x)=(k^2-3)x^2-kx+k-1$ tenga vértice en (1;0).

19) Completar con verdadero o falso. Justificar.

a) La solución de $|x+1|>-2$ es $(-\infty;+\infty)$.

b) Las rectas $2x+3y=5$ y $-2x+3y=1$ son perpendiculares.

c) Dada una función f, si $f(a)=f(b)$ entonces $a=b$.

d) La imagen de la función $f(x)=2+\cos x$ es [1;3].

e) Las rectas $6x+2y=1$ y $kx-9y=5$ son paralelas si $k=6$.

f) El dominio de la función $f(x)=\frac{\sqrt{x+2}}{x}$ es $[2;+\infty)$.

20) Una población de moscas aumenta de acuerdo con la ley de crecimiento exponencial. Si hay 100 moscas tras el segundo día de experimento y 400 moscas después del cuarto día, ¿Cuántas moscas había al iniciar el experimento?

21) En un experimento de cultivo de cierta bacteria, se inicia con 100 bacterias, al cabo de 2 horas se encontró que había 250 bacterias. Si se sigue el modelo exponencial, ¿Cuántas bacterias habrá presente al cabo de 3 horas, de 5 horas?

22) Cuatro meses después de la suspensión de su campaña publicitaria, unos fabricantes advierten que sus ventas han descendido de 100.000 unidades al mes a 80.000 unidades al mes. Si las ventas se ajustan a un modelo de disminución exponencial, ¿cuál será el nivel de ventas tras otros dos meses?

23) Un cierto tipo de bacteria aumenta continuamente en forma proporcional a su número presente. Si en un momento dado hay 100 bacterias y 5 horas después hay 300 bacterias, ¿cuántas bacterias habrá 10 horas después?

24) La población de un pueblo tiene un crecimiento logístico y está limitada a 100.000 habitantes. Si en 1994 la población era de 20.000 habitantes y en 2004 de 25.000, ¿en qué año alcanzará los 40.000?

25) Dada $f: A\to\Re \,/\, f(x)=\frac{x^3-x^2-5x-3}{x+1}$, hallar dominio, imagen, ceros, conjunto de positividad, de negatividad. Graficar.

26) Dada $f: A\to\Re \,/\, f(x)=\frac{\sqrt{x^3-5x^2+8x-4}}{x-2}$, hallar dominio, imagen, conjuntos: derivado, de puntos interiores, de puntos exteriores y de puntos frontera del Dominio. Graficar.

RESPUESTAS

1) a) $f(x+1) = 2x^2 + 9x + 10$ b) $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1-x}{3+5x}$, $\frac{1}{f(x)} = \frac{3x+5}{x-1}$

2) a) Es función
No es inyectiva
No es sobreyectiva

b) No es función

c) Es función
Es inyectiva
Es sobreyectiva
Es biyectiva

d) No es función

e) No es función

f) Es función
Es inyectiva
Es sobreyectiva
Es biyectiva

3) a) Dom $f = \Re$, Im $f = \Re$, $x_1 = -3$, $x_2 = 2$
b) Dom $f = \Re-\{4\}$, Im $f = \Re-\{8\}$, $x_1 = -4$
c) Dom $g = \Re-\{3;-2\}$, Im $g = \left(-\infty;-\frac{4}{25}\right] \cup (0;+\infty)$, $\nexists x / g(x) = 0$
d) Dom $h = \Re-\{2\}$, Im $f = \Re-\{-1\}$, $x_1 = 0$
e) Dom $f = [2;+\infty)$, Im $f = [\sqrt{2};+\infty)$, $\nexists x / f(x) = 0$
f) Dom $g = [0;+\infty)$, Im $g = [1;+\infty)$, $\nexists x / g(x) = 0$
g) Dom $f = \Re-\{0\}$, Im $f = \{-1;1\}$, $\nexists x / f(x) = 0$
h) Dom $f = \Re$, Im $f = [3;+\infty)$, $\nexists x / f(x) = 0$
i) Dom $h = \Re$, Im $h = [0;+\infty)$, $x_1 = 0$
j) Dom $f = \Re$, Im $f = (-\infty;3]$, $x_1 = 2$, $x_2 = -4$
k) Dom $h = \Re$, Im $h = (0;+\infty)$, $\nexists x / h(x) = 0$
l) Dom $f = \Re$, Im $f = [0;4]$, $x_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$
m) Dom $f = \Re-\{-1;1\}$, Im $f = \Re$, $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$, $x_3 = 0$
n) Dom $f = [1;+\infty)$, Im $f = [0;+\infty)$, $x_1 = 1$
o) Dom $f = \Re - \left\{\frac{1}{5} + \frac{k\pi}{5}\right\}$, Im $f = (-\infty;-1] \cup [1;+\infty)$, $\nexists x / f(x) = 0$

4) a) Dom $f = \Re$, $C_0 = \{-4;-2\}$, $C_+ = (-\infty;-4) \cup (-2;+\infty)$, $C_- = (-4;-2)$
b) Dom $f = (-1;1)$, $C_0 = \{0\}$, $C_+ = \varnothing$, $C_- = (-1;1) - \{0\}$
c) Dom $f = \Re-\{-1;3\}$, $C_0 = \varnothing$, $C_+ = (-1;3)$, $C_- = (-\infty;-1) \cup (3;+\infty)$
d) Dom $f = \Re-\{2\}$, $C_0 = \{-4\}$, $C_+ = (-\infty;-4) \cup (2;+\infty)$, $C_- = (-4;2)$

5) a) No es inyectiva, ni sobreyectiva. Es biyectiva de $\left[\frac{5}{2};+\infty\right) \to \left[-\frac{25}{4};+\infty\right)$ o de $\left(-\infty;\frac{5}{2}\right] \to \left[-\frac{25}{4};+\infty\right)$.
$f_1^{-1}(x) = \frac{5+\sqrt{25+4x}}{2}$ o $f_2^{-1}(x) = \frac{5-\sqrt{25+4x}}{2}$

b) Es biyectiva, $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x^3 + 2$

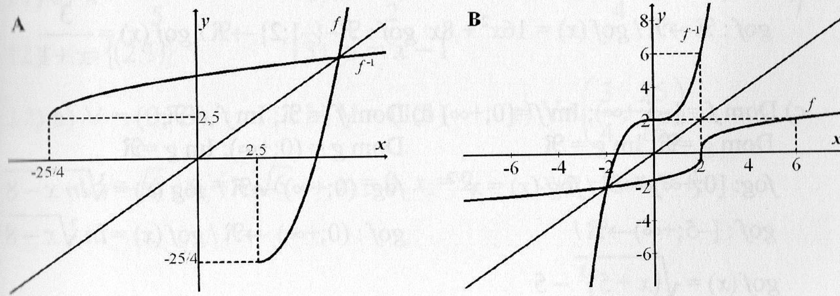
c) Es inyectiva, no es sobreyectiva.
Es biyectiva de $\Re - \left\{-\frac{1}{2}\right\} \to \Re-\{0\}$, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{1-x}{8x}}$

d) No es inyectiva ni es sobreyectiva.
Es biyectiva de $[-4;+\infty) \to [-4;+\infty)$ o de $(-\infty;-4] \to [-4;+\infty)$.
$f_1^{-1}(x) = -4 + \sqrt{x+4}$ o $f_2^{-1}(x) = -4 - \sqrt{x+4}$

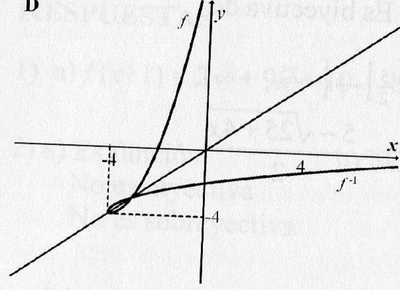
e) Es inyectiva, no es sobreyectiva.
Es biyectiva de $\Re \to (0;+\infty)$. $f^{-1}(x) = \ln x$

f) Es inyectiva, no es sobreyectiva.
Es biyectiva de $\Re-\{1\} \to \Re-\{2\}$. $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{x-2}$

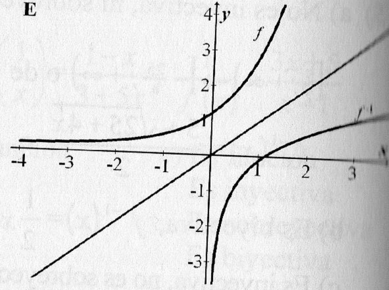
g) Es biyectiva, $f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x}{5} & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$



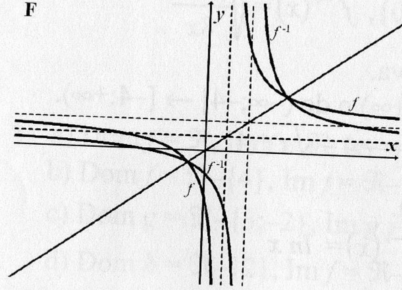
D



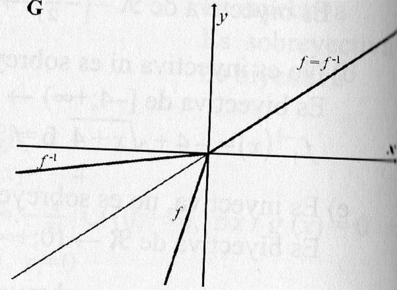
E



F



G



6) $k = -1$

7) a) Dom $f = \Re$; Im $f = \Re$
Dom $g = \Re$; Im $g = [-1;+\infty)$

fog: $\Re \to \Re$ / $fog\,(x) = 4x^2 - 3$

$gof: \Re \to \Re$ / $gof(x) = 16x^2 + 8x$

b) Dom $f = \Re - \{2\}$; Im $f = \Re - \{0\}$
Dom $g = \Re - \{-1\}$; Im $g = \Re - \{1\}$

fog: $\Re - \{-1;-2\} \to \Re$ / $fog\,(x) = \dfrac{3x+3}{-x-2}$

$gof: \Re - \{-1;2\} \to \Re$ / $gof(x) = \dfrac{3}{x+1}$

c) Dom $f = [-5;+\infty)$; Im $f = [0;+\infty)$
Dom $g = \Re$; Im $g = \Re$

fog: $[0;+\infty) \to \Re$ / $fog\,(x) = x^{3/2}$

$gof: [-5;+\infty) \to \Re$ /

$gof(x) = \sqrt{(x+5)^3} - 5$

d) Dom $f = \Re$; Im $f = \Re$
Dom $g = (0;+\infty)$; Im $g = \Re$

fog: $(0;+\infty) \to \Re$ / $fog\,(x) = \sqrt[3]{\ln x - 8}$

$gof: (0;+\infty) \to \Re$ / $gof(x) = \ln \sqrt[3]{x-8}$

e) Dom $f = \Re - \{0\}$; Im $f = \Re - \{0\}$
Dom $g = \Re - \{1\}$; Im $g = \Re$

fog: $\Re - \{1;2\} \to \Re$ / $fog\,(x) = \dfrac{1}{\ln|x-1|}$

$gof: \Re - \{0;1\} \to \Re$ / $gof(x) = \ln\left|\dfrac{1}{x} - 1\right|$

f) Dom $f = \Re$; Im $f = \Re^+$
Dom $g = \Re^+$; Im $g = \Re$

fog: $\Re^+ \to \Re$ / $fog\,(x) = e^{3\ln x + 2}$

gof: $\Re \to \Re$ / $gof(x) = 3x$

g) Dom $f = \Re$; Im $f = \Re$
Dom $g = \Re - \{-4\}$; Im $g = (-\infty;1)$

fog: $\Re - \{-4\} \to \Re$ /

$fog\,(x) = \dfrac{x^3 + x^2 . |x+4|}{|x+4|^3}$

$gof: \Re - \{-2\} \to \Re$ /

$gof(x) = \dfrac{x^3 + x^2}{|x^3 + x^2 + 4|}$

h) Dom $f = \Re$; Im $f = \Re$
Dom $g = \Re - \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$; Im $g = \Re - (-1;1)$

fog: $\Re - \{\frac{\pi}{2} + k\pi\} \to \Re$ /

$fog\,(x) = \dfrac{1}{\cos x} - 1$

$gof: \Re - \{(\frac{\pi}{2} + 1) + k\pi\}\ k \in Z$ /

$gof(x) = \dfrac{1}{\cos(x-1)}$

8) $f_1(x) = x - 2$, $f_2(x) = -x + 1$ 9) A) a B) c

10) a) $y = -\dfrac{3}{2}x + 7$ b) $y = -3x + \dfrac{11}{2}$ c) $y = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{5}{8}$

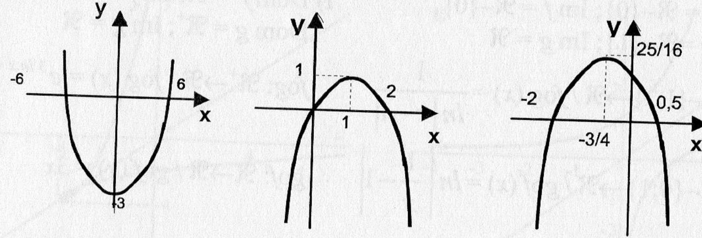
d) $y = \dfrac{2}{3}x - 2$ e) $y = -1$ f) $y = -2x + 4$

11) a) $k = -\dfrac{2}{5}$ b) $k = \dfrac{3}{2}$ c) $k = -\dfrac{3}{4}$ d) $k = \dfrac{3}{7}$

12) $A = \{(2;1)\}$ 13) $y = x - 1$

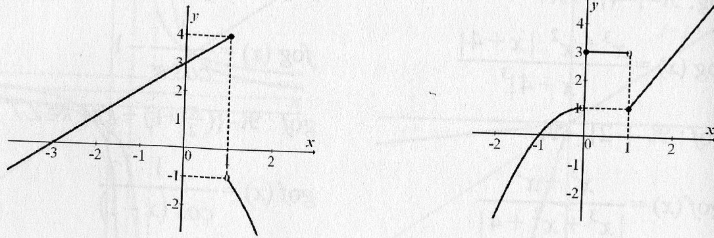
14) a) V = (0;–3),   b) V = (1;1)   c) V= $\left(\dfrac{3}{4};\dfrac{25}{16}\right)$,

$x_1 = \sqrt{6}$, $x_2 = -\sqrt{6}$ $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ $x_1 = -2$, $x_2 = \frac{1}{2}$

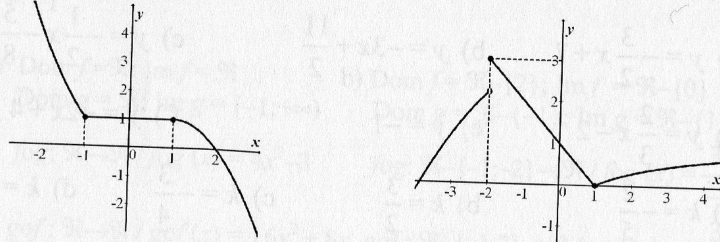


15) a) ii b) vi c) iv d) i e) v f) iii

16) a) $\text{Im}\, f = (-\infty;4]$ b) $\text{Im}\, f = \Re$



c) $\text{Im}\, f = \mathbb{R}$ d) $\text{Im}\, f = [-2;+\infty)$



17) a) t = 9 años, b) t = 3 años 18) $k = 2$ 19) a)V b)F c)F d)V e)F f)F
20) 25 moscas, 21) y (3) = 395, y (5) = 988. 22) 71.500 unidades
23) 900 bacterias 24) 2028
25) Dom $f = \Re - \{-1\}$, $C_0 = \{3\}$, $C_+ = (-\infty;-1) \cup (3;+\infty)$, $C_- = (-1;3)$
26) Dom $f = [1;+\infty) - \{2\}$, Im $f = \Re$, $D' = [1;+\infty)$, $D_i = (1;+\infty) - \{2\}$
$D_e = (-\infty;1)$, $D_f = \{1;2\}$.

Capítulo 3

Límite

Concepto y definiciones.

Límites finitos e infinitos en un punto.

Límites de variable infinita en un punto y para $x \to \infty$.

Propiedades de los límites.

Algebra de límites.

Indeterminaciones de los límites.

Infinitésimos e infinitos: definiciones, comparación.

Límites laterales.

Asíntotas: asíntota vertical, horizontal y oblicua.

LÍMITE

Concepto

Veremos en primer lugar el concepto de límite, uno de los conceptos en los que está basado el Análisis Matemático.
Consideremos una función cualquiera, por ejemplo $y = x+2$ y un punto $x = a$ cualquiera, que sea de ***acumulación*** del dominio de la función, por ejemplo $x = 2$.
Analicemos el comportamiento de la función a medida que nos acercamos al punto 2, por la izquierda y por la derecha sin tener en cuenta lo que ocurre en el 2, es decir veamos que valores toma la función *en un entorno reducido de centro* x=2.
Para eso hacemos una tabla de valores en la cual consideramos valores de x cada vez más próximos, por izquierda y por derecha, al 2, sin tener en cuenta que ocurre para $x = 2$, interesa lo que ocurre alrededor del 2, no en el 2.

x	1,9	1,99	1,999	2	2,001	2,01	2,1
$f(x)$	3,9	3,99	3,999		4,001	4,01	4,1

Vemos que a medida que los valores de x se aproximan o tienden a 2, por izquierda y por derecha, los valores de la función se aproximan a 4.
Esto se indica diciendo que el ***límite, cuando x tiende a 2, de x+2 es 4*** y se expresa así:

$$\lim_{x\to 2}(x+2)=4$$

En general: $\lim_{x\to a} f(x)=l$

Podemos decir que el límite de una función en un punto es el valor al que se aproxima la función a medida que los valores de x se aproximan al punto, por izquierda y por derecha.

Consideremos ahora las diferencias, en valor absoluto, entre los valores que toma la función y el límite para valores de x cada vez más próximos a 2.

$x = 1{,}9$	$\lvert 3{,}9-4 \rvert = 0{,}1$	$x = 2{,}1$	$\lvert 4{,}1-4 \rvert = 0{,}1$
$x = 1{,}99$	$\lvert 3{,}99-4 \rvert = 0{,}01$	$x = 2{,}01$	$\lvert 4{,}01-4 \rvert = 0{,}01$
$x = 1{,}999$	$\lvert 3{,}999-4 \rvert = 0{,}001$	$x = 2{,}001$	$\lvert 4{,}001-4 \rvert = 0{,}001$

Vemos que a medida que nos acercamos al punto 2, por la izquierda y por la derecha, la diferencia, en valor absoluto, entre los valores de la función y el límite se hace cada vez más pequeña.

Definiciones

a) Decimos que una función tiene límite finito en un punto $x = a$ de acumulación de su dominio cuando la diferencia, en valor absoluto, entre los valores de la función y el límite se puede hacer tan pequeña como se quiera con tal de considerar valores de x suficientemente próximos al punto $x = a$, es decir pertenecientes a un entorno reducido de centro a y de radio suficientemente pequeño (h).

Es decir que para cualquier ε (llamamos ε a la diferencia entre los valores de la función y el límite) existe un h, que depende de ε, tal que para todos los x pertenecientes al E* $(a;h)$ se verifica que la diferencia, en valor absoluto, entre los valores de la función y el límite es menor que el ε elegido: $\left|f(x)-l\right|<\varepsilon$.

Veamos la siguiente definición que expresa lo que hemos señalado:

b)

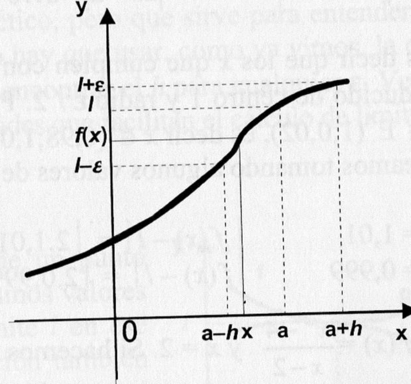
$\lim_{x\to a} f(x)=l \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists h(\varepsilon)/\forall x:\left[x\in Df \wedge x\in E^*(a;h)\right]\Rightarrow\left|f(x)-l\right|<\varepsilon$ u otra definición equivalente es:

c)

$\lim_{x\to a} f(x)=l \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\ h(\varepsilon)/\forall x:(x\in Df \wedge 0<\left|x-a\right|<h)\Rightarrow\left|f(x)-l\right|<\varepsilon$

El punto debe ser de acumulación del dominio porque de lo contrario no existirían los x para los cuales se puede calcular $f(x) - l$.

Interpretación geométrica



Desde el punto de vista geométrico, a cualquier x que esté en el intervalo $(a - h\ ;\ a + h)$, (excepto $x = a$, recordemos que el entorno es reducido), le corresponde un valor de la función en el intervalo $(l - \varepsilon\ ;\ l + \varepsilon)$.

Ejemplos

a) Para el ejemplo anterior vimos que el límite es 4. La forma de demostrarlo es aplicando la definición de límite. Es decir demostrando que por pequeña que sea la diferencia ε, siempre existirán valores de x suficientemente próximos a $x = 2$ para los cuales se verifica que: $\left|f(x)-l\right|<\varepsilon$.

$0<\left|x+2-4\right|<\varepsilon\Rightarrow 0<\left|x-2\right|<\varepsilon \therefore h=\varepsilon$, es decir que si $\varepsilon = 0{,}01$, $h = 0{,}01$. Por lo tanto los x que verifican la definición son los que están en un entorno reducido de centro 2 y radio 0,01.

$x\in E^*(2;0{,}01)$ o sea que $x \in (1{,}99;2{,}01) - \{2\}$.

Si los x están fuera de este intervalo pueden o no cumplir con la definición, pero cualquier x de este intervalo debe cumplir la definición. Verifiquemos por ejemplo para:

$x = 1{,}995$ $\quad \left|f(x) - l\right| = \left|1{,}995 + 2 - 4\right| = \left|-0{,}005\right| < 0{,}01$

$x = 2{,}0003$ $\quad \left|f(x) - l\right| = \left|2{,}0003 + 2 - 4\right| = \left|0{,}0003\right| < 0{,}01$

b) $f(x) = 2x + 3$ y $x = 1$, si hacemos una tabla de valores podemos ver que a medida que nos acercamos al 1, por izquierda y por derecha, los valores de la función se aproximan a 5.

Es decir que el límite es 5: $\lim_{x\to 1}(2x+3) = 5$.

Ahora debemos demostrar que ese valor es el límite.

$$0<|2x+3-5|<\varepsilon \Rightarrow 0<|2x-2|<\varepsilon \therefore 0<2.|x-1|<\varepsilon \Rightarrow 0<|x-1|<\frac{\varepsilon}{2} \therefore h=\frac{\varepsilon}{2}$$

Es decir que los x que cumplen con la definición están en un entorno reducido de centro 1 y radio $\varepsilon / 2$. Por ejemplo, si $\varepsilon = 0{,}04$ entonces $x\in E^*(1;0{,}02)$, es decir $x \in (0{,}98;1{,}02) - \{1\}$. Veamos tomando algunos valores de dicho intervalo si verifica:

$x = 1{,}01$ $\quad |f(x) - l| = |2.1{,}01+3-5| = |0{,}02| < 0{,}04$

$x = 0{,}999$ $\quad |f(x) - l| = |2.0{,}999+3-5| = |-0{,}002| < 0{,}04$

c) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ y $x = 2$. Si hacemos una tabla de valores podemos ver que a medida que nos acercamos al 2, por izquierda y por derecha, los valores de la función se aproximan a 4, aunque el 2 no pertenece al dominio de la función. Lo importante es que el 2 es punto de ***acumulación*** del dominio de $f(x)$ ya que en todo entorno del 2 hay otros puntos que pertenecen al dominio de f. $(Dom\ f: \Re - \{2\})$. Es decir que el límite es 4: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = 4$.

Ahora debemos demostrar que ese valor es el límite.

$$0<\left|\frac{x^2-4}{x-2}-4\right|<\varepsilon \Rightarrow 0<\left|\frac{(x+2).(x-2)}{x-2}-4\right|<\varepsilon \Rightarrow 0<|x-2|<\varepsilon \Rightarrow h=\varepsilon$$

d) Demostraremos que el $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3+x^2-4x}{1-x} = 2$

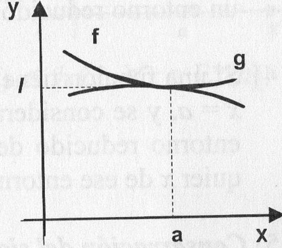
$$0<\left|\frac{3+x^2-4x}{1-x}-2\right|<\varepsilon \Rightarrow 0<\left|\frac{(x-1).(x-3)}{-(x-1)}-2\right|<\varepsilon$$

$$0<|-x+1|<\varepsilon \Rightarrow 0<|x-1|<\varepsilon \Rightarrow h=\varepsilon$$

Nota: una cosa es calcular un límite y otra cosa es demostrar que ese valor que suponemos como límite es el límite. Hasta ahora calculamos los límites haciendo una tabla de valores, procedimiento que no es muy práctico, pero que sirve para entender el concepto. Para demostrarlo hay que usar, como ya vimos, la definición de límite, hay que encontrar el h para cualquier ε. Veremos ahora algunas propiedades que facilitan el cálculo de límites.

Propiedades de los límites

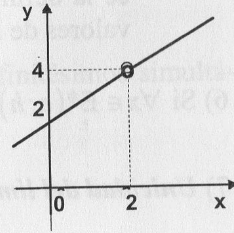
1) Si en un entorno reducido de un punto $x = a$ una función g toma los mismos valores que otra función f que tiene límite l en ese punto, entonces la primera función también tiene límite en ese punto y coincide con el límite de la primera función.



$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$$

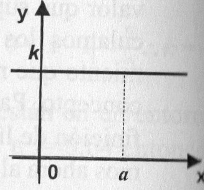
Esta propiedad facilita el cálculo de los límites. Veamos el caso del 3° ejemplo donde tenemos que calcular el $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = 4$. Llegamos a que el límite vale 4 haciendo la tabla de valores.

Veamos ahora otra forma de resolverlo. Si factoreamos y simplificamos queda: $\dfrac{x^2-4}{x-2} = \dfrac{(x+2).(x-2)}{x-2} = x+2$, vemos que $\forall x \neq 2$, ambas funciones toman los mismos valores, por lo tanto la primera función tiene el mismo límite que la segunda en $x = 2$. El límite de la segunda función podemos calcularlo aplicando la regla práctica: $\lim\limits_{x\to 2}(x+2) = 4$.



Por lo tanto el $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = 4$.

2) ***Límite de la función constante***

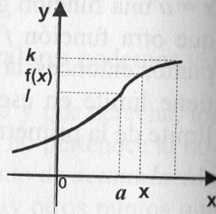


El límite de la función constante en cualquier punto es dicha constante.

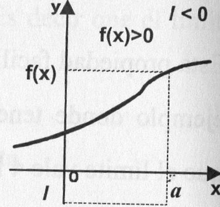
$\lim\limits_{x\to a} k = k$, $|f(x) - l| < \varepsilon \Rightarrow |k - k| < \varepsilon \Rightarrow 0 < \varepsilon$, siempre se verifica.

3) Si una función tiene límite finito en un punto $x = a$, entonces existe un entorno reducido del punto a donde la función está acotada.

4) Si una función tiene límite finito l en un punto $x = a$, y se considera $k > l$, entonces existe un entorno reducido del punto donde para cualquier x de ese entorno $f(x) < k$.



5) ***Conservación del signo***



En un entorno reducido de un punto la función tiene el mismo signo que su límite en ese punto.

si $l < 0 \Rightarrow f(x) < 0 \quad \forall x \in E^*(a)$
si $l > 0 \Rightarrow f(x) > 0 \quad \forall x \in E^*(a)$

Dem: lo demostramos por el absurdo, suponemos que $f(x) > 0$ y que el $l < 0$.
Del gráfico surge que: $|f(x) - l| > |l|$, por lo tanto contradice la definición de límite que dice que la diferencia entre los valores de la función y el límite debe tender a 0.

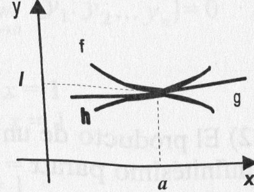
6) Si $\forall x \in E^*(a;h) : \lim\limits_{x\to a} f(x) < \lim\limits_{x\to a} g(x) \Rightarrow f(x) < g(x)$.

7) ***Unicidad del límite***

Si una función tiene límite en un punto dicho límite es único.

Dem.: lo demostramos por el absurdo. Suponemos que existen dos límites distintos: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l_1 \wedge \lim\limits_{x\to a} f(x) = l_2$, entonces $l_1 < l_2$ o $l_2 < l_1$, por lo tanto por propiedad 6, $f(x) < f(x)$, que es absurdo.

Teorema de intercalación



8) Si una función, en el entorno reducido de un punto, está constantemente comprendida entre otras dos funciones que tienen el mismo límite en dicho punto, la primera función también tiene ese límite en el punto considerado.

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$, $\lim\limits_{x\to a} h(x) = l$ y $f(x) \le g(x) \le h(x)$, $\forall x \in E^*(a)$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to a} g(x) = l$

INFINITÉSIMOS

Una función es un infinitésimo para $x = a \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$

Es decir que una función es infinitésima en un punto si en ese punto tiene límite 0. Las funciones pueden ser infinitésimas para determinados puntos y no serlas para otros.

Por ejemplo, $\boldsymbol{f(x) = sen\ x}$ es infinitésimo para $x = k\pi$ ($k \in Z$) porque $\lim\limits_{x\to k\pi} sen\, x = 0$.

Infinitésimos simultáneos: dos funciones son infinitésimos simultáneos para un valor de x si son infinitésimos para el mismo valor de x.

Propiedades de los infinitésimos simultáneos

1) La suma algebraica de un número finito de infinitésimos simultáneos para $x = a$ es otro infinitésimo para $x = a$.

H) $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son infinitésimos para $x = a$

T) $y = y_1 \pm y_2 \pm \ldots \pm y_n$ es infinitésimo para $x = a$

$\lim\limits_{x\to a} (y_1 \pm y_2 \pm \ldots \pm y_n) = 0$

Ejemplo: $y_1 = x - 1$ es un infinitésimo para $x = 1$
$y_2 = x^2 - 1$ es un infinitésimo para $x = 1$
$y_3 = x^3 - 1$ es un infinitésimo para $x = 1$

$y_1 + y_2 + y_3 = x^3 + x^2 + x - 3$ es un infinitésimo para $x = 1$

$$\lim_{x\to 1}\left(x^3+x^2+x-3\right)=0$$

2) El producto de un infinitésimo para $x = a$ por una constante es otro infinitésimo para $x = a$.

H) y es infinitésimo para $x = a$
T) $k.y$ es infinitésimo para $x = a$

3) El producto de un infinitésimo para $x = a$ por una función acotada es otro infinitésimo para $x = a$.

H) f es infinitésimo para $x = a$, $\lim_{x\to a} f(x)=0$
g es una función acotada, en $E^*(a): |g(x)| \le k$

T) $f\,.\,g$ es infinitésimo para $x = a$

D) $|f(x)-l|<\varepsilon \Rightarrow |f(x)|<\varepsilon \Rightarrow |f(x)|<\dfrac{\varepsilon}{k} \wedge |g(x)|\le k$

Multiplicando m.a m. $|f(x).g(x)|<\varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to a}[f(x).g(x)]=0$

Ejemplo: $\lim_{x\to 0} x.\,sen\,\dfrac{1}{x}$

Tenemos el producto entre una función que tiende a 0, es decir un infinitésimo, que es $f(x) = x$ y otra cuyo límite desconocemos que es $g(x) = sen\,\dfrac{1}{x}$. Pero ésta última sabemos, por ser la función seno, que es una función acotada. Por lo tanto el $\lim_{x\to 0} x.\,sen\,\dfrac{1}{x}=0$.

4) El producto de un número finito de infinitésimos simultáneos para $x = a$ es otro infinitésimo para $x = a$.

H) $y_1, y_2,\ldots,y_n$ son infinitésimos para $x = a$

T) $y = y_1 . y_2 \ldots . y_n$ es infinitésimo para $x = a \Rightarrow \lim_{x\to a}(y_1 . y_2 \ldots y_n)=0$

Ejemplo: $y_1 = x - 1$ es un infinitésimo para $x = 1$
$y_2 = x^2 - 1$ es un infinitésimo para $x = 1$

$y_1 . y_2 = x^3 - x^2 - x + 1$ es un infinitésimo para $x = 1$

$$\lim_{x\to 1}\left(x^3-x^2-x+1\right)=0$$

5) El cociente de dos infinitésimos simultáneos para $x = a$ ***no*** siempre es otro infinitésimo para $x = a$.

Ejemplo: ya vimos el caso del $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}\left(\dfrac{\to 0}{\to 0}\right)$, es un cociente de dos infinitésimos y sin embargo sabemos que el límite vale 4.

RELACIÓN FUNDAMENTAL DEL LÍMITE

$\lim_{x\to a} f(x)=l \Leftrightarrow f(x)= l+\varepsilon \Rightarrow \varepsilon \to 0$ cuando $x \to a$, ε es un infinitésimo para $x \to a$.

Dem.: $\lim_{x\to a} f(x)=l \Leftrightarrow \lim_{x\to a}[f(x)-l]=0 \Leftrightarrow f(x)-l=\varepsilon \Leftrightarrow f(x)=l+\varepsilon$

ÁLGEBRA DE LÍMITES

1) Límite de una suma

El límite de la suma de dos o más funciones, cada una de las cuales tiene límite finito para $x \to a$, es igual a la suma de los límites de cada una de ellas.

H) $\lim_{x\to a} f_1(x)=l_1, \lim_{x\to a} f_2(x)=l_2,..., \lim_{x\to a} f_n(x)=l_n$

T) $\lim_{x\to a} [f_1(x)+f_2(x)+...+f_n(x)]=l_1+l_2+...+l_n$

D) Por la relación fundamental del límite:

$$\begin{array}{l} f_1(x)=l_1+\varepsilon_1 \\ f_2(x)=l_2+\varepsilon_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ f_n(x)=l_n+\varepsilon_n \\ \hline f_1(x)+f_2(x)+...+f_n(x)=l_1+l_2+...+l_n+\varepsilon_1+\varepsilon_2+...+\varepsilon_n \end{array}$$

Por propiedad de los infinitésimos, $\varepsilon_1+\varepsilon_2+...+\varepsilon_n=\varepsilon$, por lo tanto, por la relación fundamental del límite

$$\lim_{x\to a} [f_1(x)+f_2(x)+...+f_n(x)]=l_1+l_2+...+l_n$$

2) Límite de un producto

El límite del producto de dos funciones, cada una de las cuales tiene límite finito para $x\to a$, es igual al producto de los límites de cada una de ellas.

H) $\lim_{x\to a} f_1(x)=l_1, \lim_{x\to a} f_2(x)=l_2$

T) $\lim_{x\to a} [f_1(x).f_2(x)]=l_1.l_2$

D) Por la relación fundamental del límite:

$$\begin{array}{l} f_1(x)=l_1+\varepsilon_1 \\ f_2(x)=l_2+\varepsilon_2 \\ \hline f_1(x).f_2(x)=l_1.l_2+l_1.\varepsilon_2+l_2.\varepsilon_1+\varepsilon_1.\varepsilon_2 \end{array}$$

Por propiedad de los infinitésimos, $l_1.\varepsilon_2+l_2.\varepsilon_1+\varepsilon_1.\varepsilon_2=\varepsilon$, por lo tanto, por la relación fundamental del límite $\lim_{x\to a}[f_1(x).f_2(x)]=l_1.l_2$

3) Límite de un cociente

El límite del cociente de dos funciones, cada una de las cuales tiene límite finito para $x\to a$, es igual al cociente de los límites de cada una de ellas, si el límite del denominador es $\neq 0$.

H) $\lim_{x\to a} f_1(x)=l_1, \lim_{x\to a} f_2(x)=l_2$

T) $\lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{l_1}{l_2}$

4) Límite del logaritmo

El límite del logaritmo de una función es el logaritmo del límite

$$\lim_{x\to a} f(x)=l_1>0 \Rightarrow \lim_{x\to a}[\log_b f(x)]=\log_b l_1$$

5) Límite de la función potencial-exponencial

El límite de la función potencial-exponencial es igual al límite de la base elevado al límite del exponente.

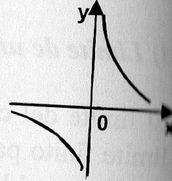
$$\lim_{x\to a} f_1(x)=l_1>0, \lim_{x\to a} f_2(x)=l_2 \Rightarrow \lim_{x\to a}\left[[f_1(x)]^{f_2(x)}\right]=l_1^{l_2}$$

GENERALIZACIÓN DEL CONCEPTO DE LÍMITE

Hasta ahora estudiamos el caso de los límites finitos en un punto, es decir vimos que a medida que nos acercamos al punto por la izquierda o por la derecha, los valores de la función se aproximan a un número finito. Veremos ahora otros casos.

1) Límite infinito en un punto

Analicemos este caso: $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$



Para analizar el comportamiento de la función en un entorno reducido del 0 hacemos una tabla de valores:

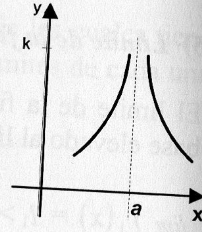
x	-0,01	-0,001	-0,00001	0	0,00001	0,001	0,01
$f(x)$	-100	-1.000	-100.000		100.000	1.000	100

Vemos, en este caso, que a medida que los valores de $x \to 0$, los valores de la función, en valor absoluto, toman valores cada vez más grandes. Esto se expresa diciendo que el límite, cuando $x \to 0$, es infinito:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$$

En general: $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$

Una función tiene límite infinito en un punto $x = a$ de acumulación de su dominio cuando a medida que los valores de x se aproximan a $x = a$, por la izquierda y por la derecha, los valores de la función superan, en valor absoluto, cualquier valor $\boldsymbol{k}$, por más grande que éste sea.



Definición

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall k > 0, \exists h(k) / \forall x : [x \in Df \wedge 0 < |x - a| < h] \Rightarrow |f(x)| > k$$

Nuevamente aquí debemos distinguir entre el cálculo y la demostración. Podemos determinar que un límite es infinito haciendo una tabla de valores, como hemos visto. Pero para demostrar que un límite es infinito debemos aplicar la definición, es decir demostrar que por más grande que sea k, existe un h, que depende de k, tal que para todos los x que estén en el entorno reducido de centro a y radio h se verifica que $|f(x)| > k$.

Ejemplos

a) Demostramos que el $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$,

$$\left|\frac{1}{x}\right| > k \Rightarrow \frac{1}{|x|} > k \Rightarrow |x| < \frac{1}{k} \Rightarrow h = \frac{1}{k}$$

Es decir que cualquiera sea $k > 0$, existe un entorno reducido de centro 0 y radio $1/k$, tal que todos los x que pertenecen a dicho entorno cumplen con la definición.

Veamos algunos casos:

$k = 1.000$ $\quad h = 0,001 \Rightarrow x \in E^*(0;0,001)$ es decir que:
$x \in (-0,001;0,001) - \{0\}$.
$x = 0,0005$ $\quad |f(x)| = \left|\frac{1}{0,0005}\right| = 2.000 > 1.000$

$k = 10.000$ $\quad h = 0,0001 \Rightarrow x \in E^*(0;0,0001)$ es decir que:
$x \in (-0,0001;0,0001) - \{0\}$.
$x = 0,00004$ $\quad |f(x)| = \left|\frac{1}{0,00004}\right| = 25.000 > 10.000$

b) Demostramos que el $\lim_{x\to 2} \frac{1}{2x-4} = \infty$,

$$\left|\frac{1}{2x-4}\right| > k \Rightarrow \frac{1}{|2x-4|} > k \Rightarrow |2x-4| < \frac{1}{k} \Rightarrow 2.|x-4| < \frac{1}{k} \Rightarrow h = \frac{1}{2k}$$

Es decir que cualquiera sea $k > 0$, existe un entorno reducido de centro 2 y radio $1/2k$, tal que todos los x que pertenecen a dicho entorno cumplen con la definición.

$k = 1.000$ $\quad h = 0,0005 \Rightarrow x \in E^*(2;0,0005)$ es decir que:

$x \in (1{,}9995;2{,}0005) - \{2\}$.

$x = 1{,}9998 \qquad |f(x)| = \left|\dfrac{1}{2x1{,}9998-4}\right| = \left|\dfrac{-1}{0{,}0004}\right| = 2.500 > 1.000$

$k = 10.000 \qquad h = 0{,}00005 \Rightarrow x \in E^*(2;0{,}00005)$ es decir que:
$x \in (1{,}99995;\, 2{,}00005) - \{2\}$.

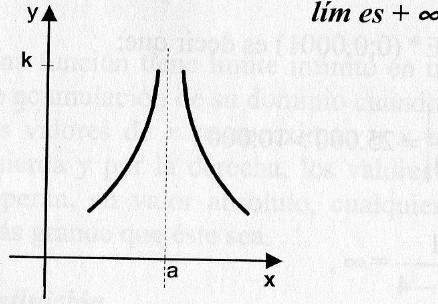
$x = 2{,}00002 \qquad |f(x)| = \left|\dfrac{1}{2x2{,}00002-4}\right| = \left|\dfrac{1}{0{,}00004}\right| = 25.000 > 10.000$

Diversificación

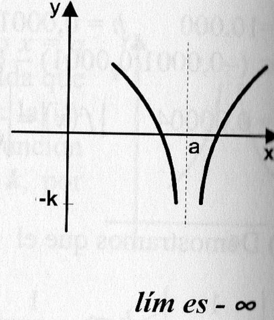
El concepto se puede diversificar considerando el signo de los valores de la función:

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall k>0, \exists h(k) / \forall x : [x \in Df \wedge 0 < |x-a| < h] \Rightarrow f(x) > k$

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall k>0, \exists h(k) / \forall x : [x \in Df \wedge 0 < |x-a| < h] \Rightarrow f(x) < -k$



lím es + ∞



lím es - ∞

2) Límites en infinito o de variable infinita

Analizar los límites en infinito significa analizar el comportamiento de la función a medida que la variable x, en valor absoluto, toma valores cada vez más grandes. $(x \to \infty)$

Pueden ocurrir 2 casos:

a) Límite finito de variable infinita

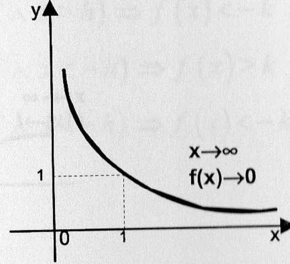
A medida que se consideran valores de x cada vez más grandes, en valor absoluto, los valores de la función se aproximan cada vez más a un número finito.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists h(\varepsilon) / \forall x : (x \in Df \wedge |x| > h) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

Es decir que a partir de un cierto x, la diferencia entre los valores de la función y el límite se puede hacer tan pequeña como se quiera, sólo hay que considerar valores de x suficientemente grandes.

Ejemplo $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

Vemos en el gráfico que a medida que los valores de x crecen, los valores de la función se aproximan cada vez más a 0.
Si hacemos una tabla de valores tenemos:



x	100	1.000	10.000	100.000	$\to \infty$
$f(x)$	0,01	0,001	0,0001	0,00001	$\to 0$

Para demostrar que el límite es 0, debemos recurrir a la definición, es decir que dado cualquier ε, por más pequeño que sea, debemos encontrar h, valor de x a partir del cual la diferencia, en valor absoluto, entre los valores de la función y el límite es menor que ε.

$\left|\dfrac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon \Rightarrow |x| > \dfrac{1}{\varepsilon} \Rightarrow h = \dfrac{1}{\varepsilon}$, los x que cumplen con la definición son aquellos que en valor absoluto sean mayores que $1/\varepsilon$.

Si $\varepsilon = 0{,}01$, $h = 100$, los que cumplen la definición son los $x > 100$.

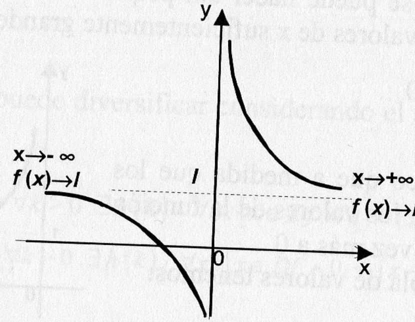
Si tomamos $x = 200$, $|f(x)| = \left|\dfrac{1}{200}\right| = 0{,}005 < 0{,}01$.

Diversificación

El caso se puede diversificar si analizamos el signo de los valores de x ($x \to +\infty$, o $x \to -\infty$)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=l \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists h(\varepsilon)/\forall x:(x\in Df \wedge x>h) \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=l \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\, h(\varepsilon)/\forall x:\ (x\in Df \wedge x<-h) \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$$



b) *Límite infinito de variable infinita*

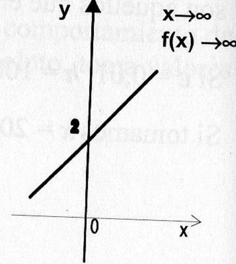
A medida que se consideran valores de x cada vez más grandes, en valor absoluto, los valores de la función superan cualquier valor k, por más grande que éste sea.

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall\, k>0, \exists\, h(k)/\forall x:(x\in Df \wedge |x|>h) \Rightarrow |f(x)|>k$$

Es decir que a partir de un cierto x, que denominamos h, los valores de la función, en valor absoluto, superan cualquier valor de k por más grande que éste sea.

Ejemplo

$\lim_{x\to\infty} (x+2) = \infty$



Vemos que a media que x toma valores cada vez más grandes, en valor absoluto, los valores de la función también crecen, en valor absoluto, indefinidamente.

Diversificación

Este caso se puede diversificar si tenemos en cuenta los signos de los infinitos. Veamos los distintos casos y luego analizaremos los gráficos correspondientes.

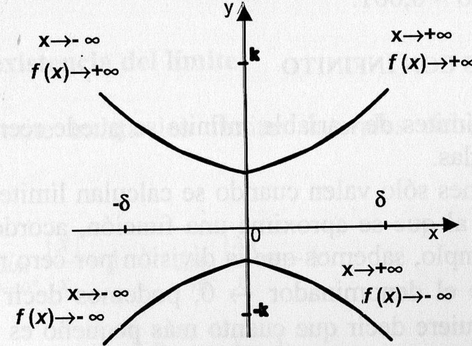
$$\lim_{x\to\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall k>0,\ \exists h(k)/\forall x:(x\in Df \wedge x>h) \Rightarrow f(x)>k$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \forall k>0,\ \exists h(k)/\forall x:(x\in Df \wedge x>h) \Rightarrow f(x)<-k$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall k>0,\ \exists h(k)/\forall x:(x\in Df \wedge x<-h) \Rightarrow f(x)>k$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \forall k>0,\ \exists h(k)/\forall x:(x\in Df \wedge x<-h) \Rightarrow f(x)<-k$$

En este gráfico ejemplificamos los 4 casos.



Veamos como se demuestran algunos límites aplicando estas definiciones.

a) $\lim_{x\to+\infty} 2^x = +\infty$,

debemos encontrar a partir de que valor de x (h) se verifica que $2^x > k$ (cualquiera sea k).

$2^x > k \Rightarrow x.\log 2 > \log k \Rightarrow x > \dfrac{\log k}{\log 2} \Rightarrow h = \dfrac{\log k}{\log 2}$, $\forall x > h$ se verifica que $f(x) > k$, tal como lo establece la definición.

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^x = 0$,

debemos encontrar para que valores de x se verifica que la diferencia entre los valores de la función y el límite se pueden hacer tan pequeña como se quiera.

$$\left|2^x - 0\right| < \varepsilon \Rightarrow 2^x < \varepsilon \Rightarrow x.\log 2 < \log \varepsilon \Rightarrow x < \frac{\log \varepsilon}{\log 2} \Rightarrow h = \frac{\log \varepsilon}{\log 2}.$$

Cuando x, sea menor que $\dfrac{\log \varepsilon}{\log 2} = -h$, cualquiera sea ε, se verifica la definición. Si $\varepsilon = 0{,}001$, $-h = \dfrac{\log 0{,}001}{\log 2} = \dfrac{-3}{0{,}30103} = -9{,}96$. x debe ser $< -h$, es decir $< -9{,}96$. $x = -10$ debe verificar la definición:
$2^{-10} = 0{,}000976 < 0{,}001$.

OPERACIONES CON INFINITO

Para calcular límites de variable infinita se puede reemplazar y operar según estas reglas.
Estas operaciones sólo valen cuando se calculan límites, siempre se refieren al valor al que se aproxima una función, acorde al concepto de límite. Por ejemplo, sabemos que la división por cero no existe, pero si en un cociente el denominador $\to 0$, podemos decir que el cociente $\to \infty$, lo que quiere decir que cuanto más pequeño es el denominador, mayor es el cociente. Como sabemos que trabajamos en un entorno reducido del punto, sabemos que el denominador nunca llega a valer 0.

$+\infty + \infty = +\infty$ $\quad k.\infty = \infty \ (k \neq 0)$ $\quad \dfrac{k}{\to \infty} = 0$ $\quad \infty \pm k = \infty$ $\quad \dfrac{\to k}{\to 0} = \infty$

$k^{+\infty} = 0 \ (0 < k < 1)$ $\quad k^{+\infty} = \infty \ (k > 1)$ $\quad \dfrac{\to \infty}{k} = \infty$ $\quad \infty.\infty = \infty$ $\quad \infty^{\infty} = \infty$

$k^{-\infty} = \infty \ (0 < k < 1)$ $\quad k^{-\infty} = 0 \ (k > 1)$ $\quad -\infty - \infty = -\infty$ $\quad \infty^k = \infty \ (k > 0)$

$\infty^k = 0 \ (k < 0)$

LÍMITES LATERALES

Hasta ahora consideramos que los valores de x se aproximan al punto por izquierda y por derecha. Veremos que ocurre si consideramos los casos por separados.

Límite lateral a derecha

Calcular un límite a derecha significa considerar el comportamiento de la función a medida que tomamos valores de x próximos al punto por la derecha. Se expresa así: $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = l^+$.

Límite lateral a izquierda

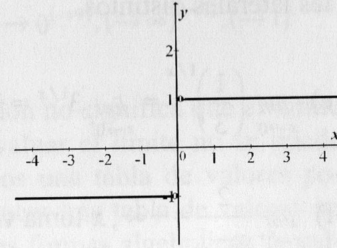
Calcular un límite a izquierda significa considerar el comportamiento de la función a medida que tomamos valores de x próximos al punto por la izquierda. Se expresa así: $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = l^-$.

Condición de existencia del límite

Para que el límite exista los límites laterales deben ser iguales: $l^+ = l^- = l$.

Ejemplos: a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{|x|}{x} = 1$ $\quad \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{|x|}{x} = -1$

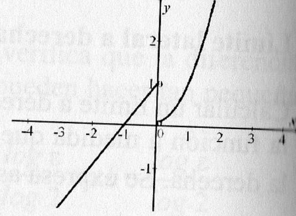
Cuando nos acercamos al 0 por la derecha, x toma valores positivos y por lo tanto $|x| = x$, el cociente es 1. Al acercarnos por la izquierda x toma valores negativos, $|x| = -x$, y por lo tanto el cociente es -1. En el origen esta función, que es la función signo de x ($sg\ x$) no tiene límite.



b) Consideremos la función $f(x)=\begin{cases} x+1 & x<0 \\ x^2 & x>0 \end{cases}$. Vamos a analizar el límite en el origen. Como la función a izquierda y derecha está definida de distinta forma, debemos recurrir a los límites laterales.

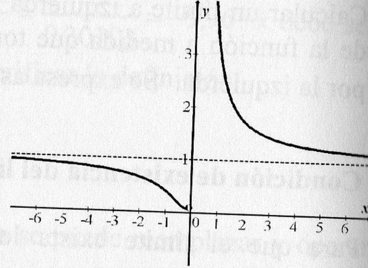
$\lim_{x\to 0^+} f(x)= \lim_{x\to 0^+} x^2 = 0$

$\lim_{x\to 0^-} f(x)= \lim_{x\to 0^-} (x+1)=1 \Rightarrow \nexists\, l$ en $x=0$



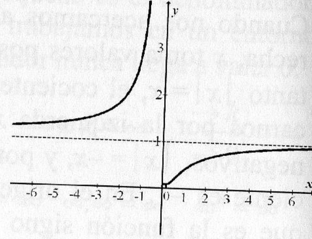
c) $\lim_{x\to 0^+} 3^{1/x} = +\infty$, cuando $x \to 0$ por la derecha toma valores positivos, $1/x$ tiende entonces a $+\infty$ y por lo tanto el límite es $+\infty$.

d) $\lim_{x\to 0^-} 3^{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{3}\right)^{1/x} = 0$, cuando $x \to 0$ por la izquierda toma valores negativos, $1/x$ tiende entonces a $-\infty$ y por lo tanto el límite se puede transformar invirtiendo la base de la potencia (por propiedad de las potencias de exponente negativo) considerando ahora que x toma valores positivos. El exponente ahora tiende a $+\infty$. El denominador de la base de la potencia tiende a infinito y el cociente a 0.



De los ejemplos c) y d) surge que $\lim_{x\to 0} 3^{1/x}$ no existe por ser sus límites laterales distintos.

e) $\lim_{x\to 0^-} \left(\frac{1}{3}\right)^{1/x} = \lim_{x\to 0^+} 3^{1/x} = +\infty$



f) $\lim_{x\to 1^+} \frac{2}{x-1} = +\infty$, x toma valores mayores que 1, el denominador es positivo, $f \to +\infty$.

g) $\lim_{x\to 1^-} \frac{2}{x-1} = -\infty$, x toma valores menores que 1, el denominador es negativo, $f \to -\infty$.

h) $\lim_{x\to 4^+} mant(x) = 0$.

i) $\lim_{x\to 4^-} mant(x) = 1$, de donde surge que el lim de la función mantisa no existe en $x=4$.

j) $\lim_{x\to 3^+} ent(x) = 3$.

k) $\lim_{x\to 3^-} ent(x) = 2$, de donde surge que el lim de la función parte entera no existe en $x=3$.

l) $\lim_{x\to 2^+} |x-2| = \lim_{x\to 2^+} (x-2) = 0$

m) $\lim_{x\to 2^-} |x-2| = \lim_{x\to 2^-} (-x+2) = 0$, de donde surge que el $\lim_{x\to 2} |x-2| = 0$

INDETERMINACIONES

A veces, al evaluar el límite, llegamos a expresiones cuyo resultado no podemos determinar llamadas indeterminaciones. Éstas son 7:

$$\frac{\to 0}{\to 0}, \frac{\to\infty}{\to\infty}, (\to +\infty)+(\to -\infty), (\to 0).(\to\infty), \to 0^{(\to 0)}, (\to\infty)^{(\to 0)}, (\to 1)^{(\to\infty)}$$

Nota: que el límite de una indeterminación no significa que el límite no exista, simplemente que al evaluar el límite no se puede determinar su valor. Si hiciéramos una tabla de valores podríamos calcular su valor. Pero hacer una tabla de valores no siempre es muy práctico. Veremos formas algebraicas de salvar las indeterminaciones y poder así calcular estos límites.

A) Cociente de infinitésimos: $\dfrac{\to 0}{\to 0}$

1) *Cociente de polinomios*

Veamos que ocurre en el siguiente ejemplo: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}\ \left(\dfrac{\to 0}{\to 0}\right)$

Al evaluar los límites del numerador y del denominador llegamos a lo que se denomina una **indeterminación**, es decir que no se puede saber el valor al que tiende la función. Sin embargo, si hacemos la tabla, vemos que la función se aproxima a 2, aunque en 1 no esté definida.

x	0,9	0,99	0,999	1	1,001	1,01	1,1
$f(x)$	1,9	1,99	1,999		2,001	2,01	2,1

Que no se pueda obtener el valor del límite directamente no quiere decir que éste no exista. Cuando al evaluar los límites se llega a una indeterminación ésta se debe salvar. Veremos como se hace.

Para salvar la indeterminación buscamos una función que en un entorno reducido del punto se comporte igual que la función original. Para eso debemos tratar de factorear y simplificar. Luego evaluamos el límite en la nueva función. Si éste existe, entonces la función original tiene el mismo límite (propiedad 1 de los límites).

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}\left(\frac{\to 0}{\to 0}\right)\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1).(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2$$

En general, se factorea de la siguiente manera:

Si $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P(x)}{Q(x)}\left(\dfrac{\to 0}{\to 0}\right)\Rightarrow \lim\limits_{x\to a}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x-a).C_1(x)}{(x-a).C_2(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{C_1(x)}{C_2(x)}$

donde $C_1(x)$ y $C_2(x)$ son los cocientes de dividir $P(x)$ y $Q(x)$ por $(x-a)$.

Ejemplos

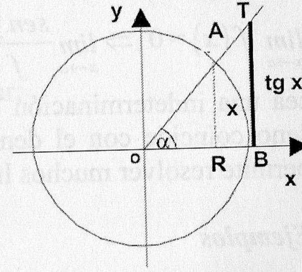
1)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x-2}{2x^3-x-1}\left(\frac{\to 0}{\to 0}\right)\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{x^3+x-2}{2x^3-x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+x+2).(x-1)}{(2x^2+2x+1).(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+2}{2x^2+2x+1}=\frac{4}{5}$$

Las divisiones se pueden efectuar aplicando la regla de Ruffini

```
 |1  0  1  -2        |2  0  -1  -1
1|   1  1   2       1|   2   2   1
 |1  1  2 | 0        |2  2   1 | 0
```

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen\ x}{x}\left(\dfrac{\to 0}{\to 0}\right)$



Para demostrar que este límite vale 1 recurrimos a una circunferencia de radio 1. Consideramos un ángulo central de x radianes $(0 < x < \pi/2)$ al que le corresponde un arco AB de longitud x.

Por B se traza la tangente TB. Quedan definidos los segmentos AR y TB, además del arco AB. Se puede ver que: long AR $< x <$ long TB.

Pero la long AR coincide con el valor del seno x, y la longitud de TB coincide con el valor de la tangente de x, por lo tanto queda:

$$sen\ x < x < tg\ x$$

dividiendo por $sen\ x$ queda $\quad 1<\dfrac{x}{sen\ x}<\dfrac{1}{cos\ x}$

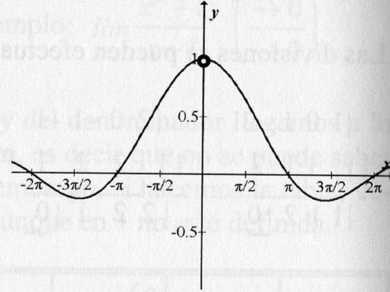
invirtiendo las expresiones y cambiando el sentido de las desigualdades queda:

$$1>\frac{sen\ x}{x}>cos\ x\Rightarrow\ cos\ x<\frac{sen\ x}{x}<1$$

Calculamos el $\lim\limits_{x\to 0^+}$ considerando valores de x positivos, queda:

$\lim_{x\to 0^+} 1 = 1$, $\lim_{x\to 0^+} \cos x = 1$, por propiedad 8 de los límites: $\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

Análogamente considerando valores de x negativos, se verifica la misma desigualdad.



Por lo tanto $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

Generalización

$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{\operatorname{sen} f(x)}{f(x)} = 1$, es decir que siempre que el límite sea una indeterminación del tipo 0/0, si el argumento de la función seno coincide con el denominador, el límite vale 1. Esta propiedad permite resolver muchos límites como los siguientes:

Ejemplos

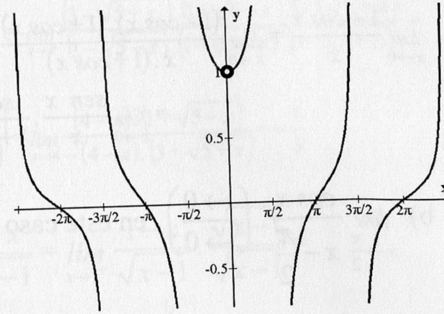
a) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{3x} \left(\frac{\to 0}{\to 0}\right) \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{3x} = 1$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{5x} \left(\frac{\to 0}{\to 0}\right)$, en este caso no coinciden el argumento de la función seno y el denominador, para poder aplicar la propiedad vista multiplicamos y dividimos la expresión por 3, agrupando queda:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{3x} \cdot \frac{3}{5} = 1 \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5}$$

Este límite vale 3/5 porque es el límite de un producto, el primer factor tiene límite 1 y el segundo factor es una constante, por lo tanto el límite vale 3/5.

3) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} \left(\frac{\to 0}{\to 0}\right)$



A partir de la propiedad anterior se puede demostrar también que este límite vale 1.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x.\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1.1 = 1$$

Generalización

También esta propiedad se puede generalizar:

$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{\operatorname{tg} f(x)}{f(x)} = 1$

Ejemplos

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(5x)}{5x} \left(\frac{\to 0}{\to 0}\right) \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(5x)}{5x} = 1$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(4x)}{7x} \left(\frac{\to 0}{\to 0}\right) \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(4x)}{7x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(4x)}{4x} \cdot \frac{4}{7} = 1 \cdot \frac{4}{7} = \frac{4}{7}$

4) *Otros límites trigonométricos*

a) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} \left(\frac{\to 0}{\to 0}\right)$, en este caso tenemos un cociente de infinitésimos que no responde a ninguno de los casos vistos. Multiplicando y dividiendo por $(1+\cos x)$ se puede transformar en uno de los casos vistos.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x).(1+\cos x)}{x.(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x.(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{sen^2 x}{x.(1+\cos x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{sen\ x}{x}.\frac{sen\ x}{1+\cos x}=1.\frac{0}{2}=0$$

b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\to 0}{\to 0}\right)$, en este caso para transformarlo en uno de los casos vistos, debemos expresar el $\cos x$ como $sen\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{sen\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=-1$$

c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{sen\,x-\cos x}{1-tg\,x}\left(\dfrac{\to 0}{\to 0}\right)$, para resolver este caso hay que operar convenientemente con las funciones trigonométricas.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{sen\,x-\cos x}{1-tg\,x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{sen\,x-\cos x}{1-\frac{sen\,x}{\cos x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{sen\ x-\cos x}{\cos x-sen\ x}.\cos x=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(-\cos x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

5) *Cocientes con expresiones irracionales*

Para salvar la indeterminación se multiplica y divide por el conjugado de las expresiones irracionales.

Ejemplos

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}\left(\dfrac{\to 0}{\to 0}\right)\Rightarrow\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}.\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}=$

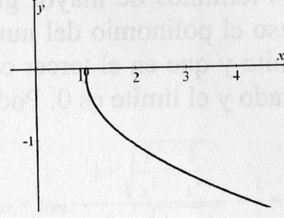
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2).\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

b) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}\left(\dfrac{\to 0}{\to 0}\right)\Rightarrow\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\left(3-\sqrt{5+x}\right).\left(1+\sqrt{5-x}\right).\left(3+\sqrt{5+x}\right)}{\left(1-\sqrt{5-x}\right).\left(1+\sqrt{5-x}\right).\left(3+\sqrt{5+x}\right)}=$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{[9-(5+x)].\left(1+\sqrt{5-x}\right)}{[1-(5-x)].\left(3+\sqrt{5+x}\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{(4-x).\left(1+\sqrt{5-x}\right)}{-(4-x).\left(3+\sqrt{5+x}\right)}=-\frac{1}{3}$$

c) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1-x}{\sqrt{x-1}}\left(\dfrac{\to 0}{\to 0}\right)\Rightarrow\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1-x}{\sqrt{x-1}}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1-x}{\sqrt{x-1}}.\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}=$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{(1-x).\sqrt{x-1}}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\left(-\sqrt{x-1}\right)=0$$



B) Cociente de infinitos $\dfrac{\to\infty}{\to\infty}$

1) Cociente de polinomios

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}\left(\dfrac{\to\infty}{\to\infty}\right)$, para resolver estos límites se dividen ambos polinomios por x^n, siendo n el exponente de mayor grado que aparezca.

Ejemplos

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+5x-4}{5x^4+x^2+1}\left(\dfrac{\to\infty}{\to\infty}\right)\Rightarrow\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+5x-4}{5x^4+x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+\frac{5}{x^3}-\frac{4}{x^4}}{5+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}=\dfrac{3}{5}$

Vemos que los cocientes tienden a 0 porque sus denominadores $\to\infty$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5+5x^2-3}{5x^4+2x^2+1}\left(\dfrac{\to\infty}{\to\infty}\right)\Rightarrow\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5+5x^2-3}{5x^4+2x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+\frac{5}{x^3}-\frac{3}{x^5}}{\frac{5}{x}+\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^5}}=\dfrac{2}{\to 0}=\infty$

El denominador tiende a 0, el cociente tiende a infinito.

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3+3x-5}{x^5+2x^2+4} \left(\dfrac{\to\infty}{\to\infty}\right) \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3+3x-5}{x^5+2x^2+4} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{3}{x^4}-\dfrac{5}{x^5}}{1+\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{4}{x^5}} = \dfrac{0}{1} = 0$

Generalización

Vimos en el primer caso que los polinomios son del mismo grado y el límite es el cociente entre los coeficientes principales (coeficientes de los términos de mayor grado de cada polinomio), que en el segundo caso el polinomio del numerador es de mayor grado y el límite es infinito y que en el tercer caso el polinomio del numerador es de menor grado y el límite es 0. Podemos efectuar la siguiente generalización:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1}+...+a_0}{b_m.x^m+b_{m-1}.x^{m-1}+...+b_0} \left(\frac{\to\infty}{\to\infty}\right) = \begin{cases} \dfrac{a_n}{b_m} & \text{si } n=m \\ \infty & \text{si } n>m \\ 0 & \text{si } n<m \end{cases}$$

2) *Cociente con expresiones irracionales*

Cuando aparecen expresiones irracionales debemos dividir por $|x|^n$, donde n es el exponente de mayor grado, considerando la diversificación del signo, si corresponde, para $x \to \pm\infty$, pero teniendo en cuenta que en los términos irracionales debemos introducir $|x|^n$ dentro de las raíces elevándolas al índice de cada raíz.

Ejemplos

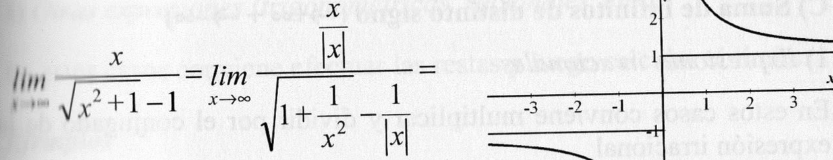
a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}-1} \left(\dfrac{\to\infty}{\to\infty}\right)$

En este caso debemos dividir por $|x|$ fuera de la raíz y por x^2 dentro de la raíz porque $|x|^2 = x^2$.

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}-1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\dfrac{x}{|x|}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-\dfrac{1}{|x|}} =$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-\dfrac{1}{x}} = \dfrac{1}{1} = 1$

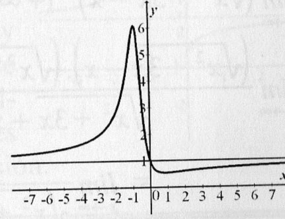
$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+\dfrac{1}{x}} = \dfrac{-1}{1} = -1$



b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+\sqrt{x^2+1}}{x^2+2x+\sqrt{x^2+1}} \left(\dfrac{\to\infty}{\to\infty}\right) \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+\sqrt{x^2+1}}{x^2+2x+\sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}}}{1+\dfrac{2}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}}} = \dfrac{1}{1} = 1$

fuera de la raíz dividimos por $|x^2| = x^2$,

dentro de la raíz por $|x^2|^2 = x^4$.

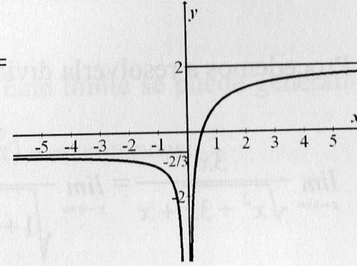


c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x-1}{\sqrt{4x^2+x}-x} \left(\dfrac{\to\infty}{\to\infty}\right)$

En este ejemplo, donde calculamos dos límites simultáneamente ($x \to \pm\infty$), debemos dividir por $|x|$. Dentro de la raíz dividimos por x^2 porque $|x^2| = x^2$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x-1}{\sqrt{4x^2+x}-x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\dfrac{2x}{|x|}-\dfrac{1}{|x|}}{\sqrt{4+\dfrac{1}{x}}-\dfrac{x}{|x|}} =$

$= \begin{cases} \text{para } x\to+\infty, & \dfrac{2-0}{2-1} = \dfrac{2}{1} = 2 \\ \text{para } x\to-\infty, & \dfrac{-2-0}{2+1} = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$



C) Suma de infinitos de distinto signo ($\to +\infty + \to -\infty$)

1) *Expresiones irracionales*

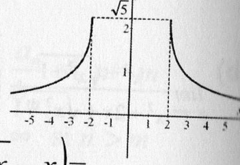
En estos casos conviene multiplicar y dividir por el conjugado de la expresión iracional

Ejemplos

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-4}\right)\ (+\infty-\infty) \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}\ \sqrt{x^2-4}\right)=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-4}\right).\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-4}\right)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2+4}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-4}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-5}}=0$$



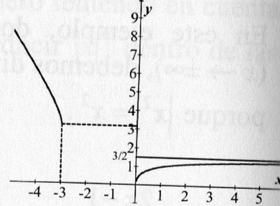
b)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)\ (+\infty-\infty) \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right).\left(\sqrt{x^2+3x}+x\right)}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x}\ \left(\frac{\to\infty}{\to\infty}\right)$$

Pasamos de una indeterminación del tipo ($\to +\infty + \to -\infty$) a una del tipo $\left(\frac{\to\infty}{\to\infty}\right)$.



Procedemos a resolverla dividiendo por $|x|$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3\frac{x}{|x|}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+\frac{x}{|x|}}\begin{cases}\text{para } x\to+\infty,\ \frac{3}{1+1}=\frac{3}{2}\\ \text{para } x\to-\infty,\ \frac{-3}{\underbrace{1-1}_{\to 0^-}}=+\infty\end{cases}$$

2) *Otras expresiones (trigonométricas, racionales, etc.)*

En estos casos conviene efectuar las restas y luego calcular el límite.

Ejemplos

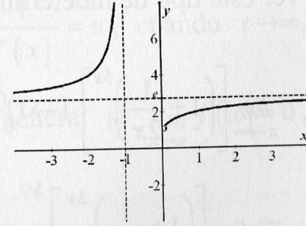
a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^2}\right)(+\infty-\infty)\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-x^2}{x^4}=\frac{1}{\to 0}=\infty$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(cosec^2x-cotg^2x\right)(+\infty-\infty)\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\left(cosec^2x-cotg^2x\right)=$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{sen^2x}-\frac{cos^2x}{sen^2x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1-cos^2x}{sen^2x}=\lim_{x\to 0}\frac{sen^2x}{sen^2x}=1$$

D) El número e: $(\to 1)^{(\to\infty)}$

Vamos analizar el $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\ (\to 1)^{(\to\infty)}$.



Cuando la base de una potencia tiende a 1 y el exponente tiene a infinito estamos frente a una indeterminación. Para este caso particular vamos a hacer una tabla de valores para analizar el comportamiento de la función.

x	-100	-1.000	-100.000		100.000	1.000	100
$f(x)$	2,7320	2,7196	2,7182		2,7182	2,7169	2,7048

Vemos que a medida que $x\to\infty$ los valores de la función se aproximan al número e.

Podemos decir que el $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$. Este límite se puede generalizar y podemos afirmar que si el $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\to\infty}}f(x)=\infty$ entonces:

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\to\infty}} \left(1+\dfrac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e$. Deben coincidir el denominador de la expresión y el exponente. A veces hay que operar convenientemente para hacerlos coincidir.

Ejemplos: a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{3x}\right)^{3x}\right](\to 1)^{(\to\infty)} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{3x}\right)^{3x}\right]=e$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{5x}\right](\to 1)^{(\to\infty)}$, en este caso no podemos decir que el límite sea el número *e*, pero podemos utilizar el número *e* para resolver este tipo de indeterminaciones.

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{5x}\right](\to 1)^{(\to\infty)} \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{5x} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x.\frac{5x}{2x}}\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right]^{5/2} = e^{5/2}$$

Hemos formado el número *e* multiplicando y dividiendo el exponente por el denominador de la expresión.

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{5x}(\to 1)^{(\to\infty)}$, debemos formar el número *e* operando convenientemente.

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(\dfrac{2x+5}{2x+3}\right)^{x}\right](\to 1)^{(\to\infty)}$, la base de la potencia tiende a 1 por ser un cociente de infinitos de igual grado con el mismo coeficiente. Para formar en estos casos el número *e* debemos efectuar el cociente.

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(\frac{2x+5}{2x+3}\right)^{x}\right](\to 1)^{(\to\infty)} \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left[\left(\frac{2x+5}{2x+3}\right)^{x}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{2x+3}\right)^{x}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{2x+3}{2}}\right)^{x}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{2x+3}{2}}\right)^{\frac{2x+3}{2}}\right]^{\left(x.\frac{2}{2x+3}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{2x+3}} = e^{1} = e$$

Otra forma de resolver indeterminaciones se verá en el capítulo de derivadas.

Otra expresión del número *e*

Si en $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e$ hacemos $\dfrac{1}{f(x)} = u$, cuando $x\to\infty$, $u\to 0$, por lo tanto $\lim\limits_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}} = e$. En general si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$,

$$\lim_{x\to a}\left[1+f(x)\right]^{\frac{1}{f(x)}} = e$$

Ejemplos: a) $\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+5x)^{\frac{1}{5x}}\right]=e$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+x)^{\frac{1}{2x}}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^{1/2} = \sqrt{e}$

Comparación de Infinitésimos

Vimos que el cociente de dos infinitésimos puede dar distintos resultados. Esto permite comparar infinitésimos, que significa determinar cuál tiende a 0 ***más rápido***.

Si $f(x)$ y $g(x)$ son infinitésimos simultáneos para $x = a$, para compararlos se calcula el $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Infinitésimos del mismo orden

Si dicho límite es una constante no nula, se dice que los infinitésimos son del mismo orden.

Ejemplo: ya vimos que el $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$, es decir que x^2-1 y $x-1$ son infinitésimos del ***mismo orden*** para $x = 1$.

Infinitésimos equivalentes

Si además dicho límite es 1, entonces los infinitésimos se dicen ***equivalentes*** y quiere decir que llegan a cero ***al mismo tiempo***.

Un ejemplo es el siguiente: $\lim\limits_{x\to 0} sen\,x=0$, $\lim\limits_{x\to 0} x=0$ y $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen\,x}{x}=1$.

Que llegan a cero al mismo tiempo quiere decir que cuando $x \to 0$, ambas funciones toman valores muy similares próximos a 0.

Aplicación

Los infinitésimos equivalentes tienen una aplicación muy importante en la resolución de límites ya que cuando se calcula un límite se puede reemplazar una función por otra siempre que sean infinitésimos equivalentes.

Ejemplos: a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen\,(3x)}{x}$, $sen\,(3x)$ es (para $x \to 0$) un infinitésimo equivalente a $3x$ porque ya vimos que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen\,(3x)}{3x}=1$, es decir que reemplazando obtenemos: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen\,(3x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{x}=3$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+sen\,(3x)}{2x+tg\,(4x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+3x}{2x+4x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{6x}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$

Infinitésimos de orden superior (o inferior)

Si dicho límite es 0, entonces $f(x)$ es un infinitésimo de ***orden superior*** a $g(x)$, es decir que llega a cero más rápido, por lo tanto para los mismos valores de x, $f(x)$ toma valores más cercanos al 0 que $g(x)$.

También se dice que $g(x)$ es un infinitésimo de ***orden inferior*** a $f(x)$.

Ejemplo: $\lim\limits_{x\to 0} x^3=0$ y $\lim\limits_{x\to 0} x^2=0$, y el $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0} x=0$, por lo tanto x^3 es un infinitésimo de orden superior a x^2 en $a=0$. O x^2 es un infinitésimo de orden inferior a x^3 en $a=0$.

Si $f(x) = x^3$ y $g(x) = x^2$, por ejemplo para $x = 0{,}1$, $f(0{,}1) = 0{,}01$ y $g(0{,}1) = 0{,}001$.

Si dicho límite es 0, se dice que $g(x)$ es un infinitésimo de ***orden superior*** a $f(x)$ o que $f(x)$ es un infinitésimo de ***orden inferior*** a $f(x)$.

COMPARACIÓN DE INFINITOS

Vimos que el cociente de dos infinitos puede dar distintos resultados. Esto permite comparar infinitos, que significa determinar que función crece más rápidamente. Si $f(x)$ y $g(x)$ son infinitos para $x \to \infty$ o $x \to a$, para compararlos se calcula el $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ x\to a}}\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Infinitos del mismo orden

Si dicho límite es una constante no nula, se dice que los infinitos son del mismo orden.

Ejemplo: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-1}{x^2+5}\left(\dfrac{\to\infty}{\to\infty}\right)\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-1}{x^2+5}=\dfrac{2}{1}=2$, es decir que $2x^2-1$ y x^2+5 son infinitos del ***mismo orden*** para $x\to\infty$.

Infinitos equivalentes

Si además dicho límite es 1, se dice que los infinitos son ***equivalentes*** y quiere decir que crecen con la misma rapidez.

Un ejemplo es el $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{x^2+5}=1$. Que crecen con la misma rapidez quiere decir que cuando $x\to\infty$, ambas funciones toman valores cada vez más grandes muy similares.

Infinitos de orden superior o inferior

Si dicho límite es infinito, se dice que $f(x)$ es un infinito de ***orden superior*** a $g(x)$, es decir que crece más rápidamente. Por lo tanto para los mismos valores de x, $f(x)$ toma valores más grandes que $g(x)$.

También se dice que $g(x)$ es un infinito de ***orden inferior*** a $f(x)$.

Ejemplo: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2}{x+5}=\infty$

Si $f(x)=3x^2$ y $g(x)=x+5$, por ejemplo $f(1.000)=3.000.000$ y $g(1.000)=1.005$.

Si dicho límite es cero, se dice que $g(x)$ es un infinito de ***orden superior*** a $f(x)$ o que $f(x)$ es un infinito de ***orden inferior*** a $g(x)$.

Ejercicios Generales Resueltos

1) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{5^{1/x}-2}{3+5^{1/x}}\left(\dfrac{\to\infty}{\to\infty}\right)$, para resolver este caso multiplicamos y dividimos por $5^{1/x}$.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{5^{1/x}-2}{3+5^{1/x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\dfrac{2}{5^{1/x}}}{\dfrac{3}{5^{1/x}}+1}=\frac{1}{1}=1$$

2) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{5^{1/x}-2}{3+5^{1/x}}=\dfrac{0-2}{3+0}=-\dfrac{2}{3}$

De 1) y 2) surge que el $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^{1/x}-2}{3+5^{1/x}}$ no existe.

3) Calcular $\lim\limits_{x\to 0} x^2\cdot\dfrac{1}{[h(x)+2]}$ si $\forall x\in\Re$: $2\le h(x)\le 3$. Justificar.

Vemos que es el límite de un producto en el cual el primer factor es un infinitésimo. El único problema sería que el segundo factor tuviese límite ∞. Pero vemos que por estar $h(x)$ entre 2 y 3, el segundo factor es una función acotada entre 0,2 y 0,25. Por lo tanto estamos en el caso del producto de un infinitésimo por una función acotada que es otro infinitésimo, por lo tanto el límite es 0.

4) $\forall x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$: $1-\cos^2 x\le f(x)\le x^2$. Calcular $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Justificar.

Calculamos el $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\cos^2 x\right)=1-1=0$ y el $\lim\limits_{x\to 0} x^2=0$. Como $f(x)$ está comprendida entre dos funciones que tienen el mismo límite, entonces $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

5) Calcular el $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}\ \left(\dfrac{\to 0}{\to 0}\right)$, para resolver la indeterminación multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador.

$$\lim_{x\to 2}\frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}=\lim_{x\to 2}\frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}\cdot\frac{3+\sqrt{x^2+5}}{3+\sqrt{x^2+5}}=\lim_{x\to 2}\frac{(4-x^2).\left(3+\sqrt{x^2+5}\right)}{4-x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\left(3+\sqrt{x^2+5}\right)=6$$

6) Calcular el $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,.\,sen\,x}{cos\,x-1}\ \left(\dfrac{\to 0}{\to 0}\right)$, para resolver la indeterminación multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\,.\,sen\,x}{cos\,x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x\,.\,sen\,x}{cos\,x-1}\cdot\frac{cos\,x+1}{cos\,x+1}=\lim_{x\to 0}\frac{x\,.\,sen\,x\,.(cos\,x+1)}{cos^2\,x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\,.\,sen\,x\,.(cos\,x+1)}{-sen^2\,x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{sen\,x}\cdot\frac{cos\,x+1}{-1}=1.(-2)=-2$$

7) Calcular el $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{x-2}}{x^2-4}\ \left(\dfrac{\to 0}{\to 0}\right)$, multiplicamos y dividimos por la expresión irracional.

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{x-2}}{x^2-4}=\lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{x-2}\,.\sqrt{x-2}}{(x^2-4).\sqrt{x-2}}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x-2}{(x-2).(x+2).\sqrt{x-2}}=$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{(x+2).\sqrt{x-2}}=\frac{1}{\to 0}=\infty$$

8) Calcular el $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x-sen(2x)}{2x+3\,sen(4x)}\ \left(\dfrac{\to 0}{\to 0}\right)$, podemos resolverlo aplicando infinitésimos equivalentes.

$$\lim_{x\to 0}\frac{6x-sen(2x)}{2x+3.\,sen(4x)}=\lim_{x\to 0}\frac{6x-2x}{2x+3.4x}=\lim_{x\to 0}\frac{4\,x}{14\,x}=\frac{2}{7}$$

9) Calcular el $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{cos^2x-5\,cos\,x+4}{cos^2x-1}\ \left(\dfrac{\to 0}{\to 0}\right)$, se resuelve factoreando tomando como variable $cos\,x$ en lugar de x.

$$\lim_{x\to 0}\frac{cos^2\,x-5\,cos\,x+4}{cos^2\,x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{(cos\,x-1).(cos\,x-4)}{(cos\,x-1).(cos\,x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{cos\,x-4}{cos\,x+1}=-\frac{3}{2}$$

10) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}=\dfrac{\infty-0}{\infty+0}\ \left(\dfrac{\to\infty}{\to\infty}\right)$

Operando queda: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^x-\frac{1}{3^x}}{3^x+\frac{1}{3^x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^{2x}-1}{3^x}\cdot\dfrac{3^x}{3^{2x}+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^{2x}-1}{3^{2x}+1}$,

dividimos todo por 3^{2x}:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3^{2x}-1}{3^{2x}+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{3^{2x}}}{1+\frac{1}{3^{2x}}}=\frac{1-0}{1+0}=1$$

11) Hallar a y b para que $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2+x^2-x}{x+1}+ax+b\right)=0$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2+x^2-x+ax^2+bx+ax+b}{x+1}\right)=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(1+a).x^2+(b+a-1).x+b+2}{x+1}\right)=0$$

Para que el límite sea 0, $(1 + a)$ y $(b + a - 1)$ deben ser 0. De donde surge que $a = -1$ y $b = 2$.

12) Indicar en qué puntos las siguientes funciones son infinitésimos simultáneos y compararlos.

$f : \Re \to \Re \,/\, f(x) = x^3 - 7x + 6 \qquad g : \Re \to \Re \,/\, g(x) = x^3 + x^2 - 6x$

Buscamos los ceros en común que tienen ambas funciones, son $x_1 = 2$ y $x_2 = -3$.

Calculamos el $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 7x + 6}{x^3 + x^2 - 6x} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2).(x-1).(x+3)}{x.(x-2).(x+3)} = \dfrac{1}{2}$

Por lo tanto son infinitésimos del mismo orden para $x_1 = 2$.

Calculamos el $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^3 - 7x + 6}{x^3 + x^2 - 6x} = \lim\limits_{x\to -3} \dfrac{(x-2).(x-1).(x+3)}{x.(x-2).(x+3)} = \dfrac{4}{3}$

Por lo tanto son infinitésimos del mismo orden para $x_2 = -3$.

13) Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) $\forall x \in \Re$: $f^2(x) \le 16 \Rightarrow \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} f(x).\cos x = 0$.

$|f(x)| \le 4 \quad \forall x \in \Re$ luego f es una función acotada y $\cos x$ es un infinitésimo en $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Como el producto de un infinitésimo por una función acotada es otro infinitésimo la proposición es verdadera.

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1} - 1}{\sqrt{x^2+16} - 4} = 4$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right).\left(\sqrt{x^2+1}+1\right).\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}{\left(\sqrt{x^2+16}-4\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right).\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2.\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}{x^2.\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)} = \frac{8}{2} = 4.$$ Por lo tanto es verdadero.

c) El producto de un infinito por una función acotada es otro infinito.

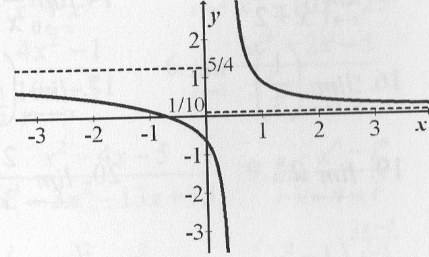
Esta afirmación es falsa. Veamos un contraejemplo: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}.\operatorname{sen} x = 1$

14) Calcular $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x + 5 - \sqrt{4x^2+7}}{\sqrt{9x^2+2} + 7x - 5} \left(\dfrac{\to\infty}{\to\infty}\right)$

Para salvar la indeterminación dividimos numerador y denominador por $|x|$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x + 5 - \sqrt{4x^2+7}}{\sqrt{9x^2+2} + 7x - 5} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x}{|x|} + \frac{5}{|x|} - \sqrt{4 + \frac{7}{x^2}}}{\sqrt{9 + \frac{2}{x}} + \frac{7x}{|x|} - \frac{5}{|x|}} =$$

$$= \begin{cases} \text{para } x \to +\infty, & \dfrac{3+0-2}{3+7-0} = \dfrac{1}{10} \\ \text{para } x \to -\infty, & \dfrac{-3+0-2}{3-7-0} = \dfrac{5}{4} \end{cases}$$



EJERCICIOS PROPUESTOS

A) Límites por definición

Aplicando la definición de límite demostrar que:

1. $\lim_{x\to 3}(x+2)=5$ 2. $\lim_{x\to 1}(2x+1)=3$ 3. $\lim_{x\to 2}x^2=4$ en (1;3)

4. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4$ 5. $\lim_{x\to 2}(3x^2+4x-6)=14$ en (1;3)

6. $\lim_{x\to\infty}(x+2)=\infty$ 7. $\lim_{x\to\infty}(x^3+1)=\infty$ 8. $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x=0$

B) Límites determinados finitos e infinitos

1. $\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x^2+4}$ 2. $\lim_{x\to 2} ln(x-1)$ 3. $\lim_{x\to -1}\frac{x^2-2}{x-2}$

4. $\lim_{x\to 0}\frac{(x-1)^2.(x+2)}{4.\cos x}$ 5. $\lim_{x\to 1}\sqrt{\frac{x+1}{8x+1}}$ 6. $\lim_{x\to 0}\frac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}$

7. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x-1}$ 8. $\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{3}$ 9. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^{x-1}$

10. $\lim_{x\to 3}\frac{1}{x^2-9}$ 11. $\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}$ 12. $\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x^3+1}$

13. $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x+2}$ 14. $\lim_{x\to 0}\frac{3}{x}$ 15. $\lim_{x\to+\infty}2^{x+1}$

16. $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 17. $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 18. $\lim_{x\to+\infty}2^x$

19. $\lim_{x\to-\infty}2^x$ 20. $\lim_{x\to-\infty}\frac{2+7^x}{3+5^x}$

C) Límites laterales

1. $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 2. $\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 3. $\lim_{x\to 0^+}3^{1/x}$ 4. $\lim_{x\to 0^-}3^{1/x}$

5. $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{3}\right)^{1/x}$ 6. $\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{3}\right)^{1/x}$ 7. $\lim_{x\to 0^+}\frac{5^{1/x}-2}{3+5^{1/x}}$ 8. $\lim_{x\to 0^-}\frac{5^{1/x}-2}{3+5^{1/x}}$

9. $\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}$ 10. $\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}$ 11. $\lim_{x\to 1^+}\frac{2}{x-1}$ 12. $\lim_{x\to 1^-}\frac{2}{x-1}$

13. $\lim_{x\to 0^-}\frac{1-3^{1/x}}{2+3^{1/x}}$ 14. $\lim_{x\to 0^+}\frac{1-3^{1/x}}{2+3^{1/x}}$

15. Hallar los límites laterales en los puntos indicados. Indicar si existe el límite y graficar.

a) $y=\begin{cases}|x| & x\neq 0\\ 2 & x=0\end{cases}$ en $x_1=0$ b) $y=\begin{cases}4-x^2 & x\leq 1\\ 2+x^2 & x>1\end{cases}$ en $x_1=1$

c) $y=\begin{cases}2 & x<-1\\ x^2 & -1<x<1\\ x+1 & x>1\end{cases}$ en $x_1=-1,\ x_2=0,\ x_3=1$

D) Límites indeterminados $\frac{\to 0}{\to 0}$

Cociente de polinomios

1. $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}$ 2. $\lim_{x\to 0}\frac{2x+3x^2}{x^3+x}$ 3. $\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{x^2-10x+25}$

4. $\lim_{x\to -1}\frac{x^5+2x^3+x^2+2}{x^3-3x^2-2x+2}$ 5. $\lim_{x\to-\frac{1}{2}}\frac{4x^2-1}{10x+5}$ 6. $\lim_{x\to 1}\frac{3x^3+2x-5}{x^4+x-2}$

7. $\lim_{x\to -4}\frac{x^2+3x-4}{x^2-16}$ 8. $\lim_{x\to 5}\frac{x^2-4x-5}{x^3-3x^2-13x+15}$ 9. $\lim_{x\to i}\frac{x^n-i^n}{x-i}$

10. $\lim_{x\to -2}\frac{x^3+4x^2+4x}{(x+2).(x-3)}$ 11. $\lim_{x\to 0}\frac{(a+x)^2-a^2}{x}$ 12. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)^{\frac{2x-2}{x-1}}$

13. Dada $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{-x^2+3x-2}$, calcular el *lím* para $x \to 1$ y $x \to 2$.

Verificar gráficamente.

Trigonométricos

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen(3x)}{x}$ 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+tg(4x)}{2x}$ 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg(2x)}{x+sen\,x}$

4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{sen(x-1)}{x^2-1}$ 5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{tg(x^2-4)}{sen(x-2)}$ 6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+tg\,x}{x+sen\,x}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg(2x)}{3x}$ 8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg(3x)}{sen(5x)}$ 9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen^3(2x)}{5x^3}$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen^4x\,.\,5x}{tg^2x}$ 11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-cos\,x}{x}$ 12. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{x-\frac{\pi}{2}}{cos\,x}$

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,x-sen\,x}{x^3}$ 14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^3(3x)}{2x\,.sen^2x}$ 15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1-cos\,x}}$

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen(a+x)-sen(a-x)}{x}$ 17. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{cos(2x)}{cos\,x-sen\,x}$

18. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1-2sen^2\frac{x}{2}}{x-\frac{\pi}{2}}$ 19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{cos^3x-5\,sen^2x-1}{cos^3x-1}$ 20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-cos\,x}{1-cos\sqrt{x}}$

Irracionales

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$ 2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\sqrt{x}-1}$ 3. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+sen\,x}-\sqrt{1-sen\,x}}{x}$ 5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

6. $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{x-2}}$ 7. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{x-2}$ 8. $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$

9. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$ 10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ 11. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$

12. $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt{x-1}}$ 13. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$ 14. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{5-\sqrt{28-x}}{\sqrt{x+5}-\sqrt{8}}$

15. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x\sqrt{a}-a\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$ $a>0$ 16. $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{3-\sqrt{1-x}}{2+\sqrt[3]{x}}$ 17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{1-\sqrt[3]{x+1}}$

E) Límites indeterminados $\dfrac{\to\infty}{\to\infty}$

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x+1}{3x^2-x+1}$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x+2}{x+5}$ 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-2}{x+x^2-5}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x-1}{x^3+4}$ 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$ 6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x+1}{x-3+\sqrt{9x^2-3}}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x+2\sqrt[3]{125\,x^6+x-1}}{7x^2+3\sqrt[4]{16x^8-3}}$ 8. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2-x+2\sqrt{9x^4+2}}{x^2+2x+3\sqrt[3]{8x^6}-2x}$

9. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+3}{\sqrt{25x^2+2}}$ 10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}$ 11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$

12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+4}{x+\sqrt[3]{x}}$ 13. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x+1}+\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{9x^2+x+2}+3x}$ 14. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+7^x}{3+5^x}$

F) Límites indeterminados $(\to+\infty)+(\to-\infty)$

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x}\right)$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1}\right)$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+10x+1}-\sqrt{x^2+4x+3}\right)$ 4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x\,.(x+3)}-x\right)$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}\right)$ 6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+5\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$ 8. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x^2-1}\right)$ 9. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{3}{x^2-4}\right)$

G) Límites indeterminados $(\to 1)^{(\to\infty)}$

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{3}{2x}\right)^{x+2}\right]$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{x-3}\right)^{4x}\right]$ 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1-\dfrac{2}{x-1}\right)^{2x+3}\right]$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(\dfrac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x+4}\right]$ 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(\dfrac{2x+1}{2x-4}\right)^{6x}\right]$ 6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(\dfrac{7x}{7x+2}\right)^{x-1}\right]$

7. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{1/x}$ 8. $\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{1}{x^2+x}}$ 9. $\lim\limits_{x\to 0}[1+sen\,(3x)]^{4/x}$

10. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2tg\,x)^{\frac{1}{sen\,x}}$ 11. $\lim\limits_{x\to 0}(1+sen\,x)^{\frac{1}{x^2+x}}$ 12. $\lim\limits_{x\to 0}[1+3\,sen\,(2x)]^{\frac{1}{tg\,x}}$

H) Problemas generales

1. Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\left[sen\,x\,.\dfrac{1}{[h(x)-7]}\right]$ si $\forall x\in\Re$: $1\le h(x)\le 5$. Justificar.

2. $\forall x\in\Re$: $|h(x)|\le x^2-1$. Calcular el $\lim\limits_{x\to -1}h(x)$. Justificar.

3. Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+p^2}-p}{\sqrt{x^2+q^2}-q}$

4. Hallar $k\in\Re$ para que $\lim\limits_{x\to 0}(1+tg\,x)^{\frac{k}{3x}}=e^{1/3}$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}-x^2+6}{x^{2n}+x^2+4}$ $x\in\Re$

6. Indicar en qué puntos las siguientes funciones son infinitésimos simultáneos y compararlos.

$f:[-1;+\infty]\to\Re\,/\,f(x)=\sqrt{x+1}-1$ $g:\Re\to\Re\,/\,g(x)=x^2$

7. Indicar el valor de verdad de la siguiente afirmación

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}=\lim_{x\to 0}x.(1+sen\,x)^{1/x}$$

8. Hallar k para que $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-4}\right)^{6x+1}\right]$ sea igual a $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+1)x^3+2x}{3x^3-2}$

RESPUESTAS

B) 1) $\frac{1}{2}$; 2) 0; 3) $\frac{1}{3}$; 4) $\frac{1}{2}$; 5) $\frac{\sqrt{2}}{3}$; 6) 0; 7) ∞; 8) ∞; 9) 1;

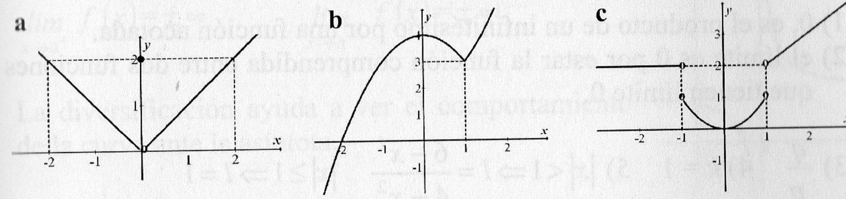
10) ∞; 11) ∞; 12) 0; 13) 0; 14) ∞; 15) +∞ 16) 0, 17) +∞

18) +∞; 19) 0; 20) $\frac{2}{3}$

C) 1) 1; 2) 1; 3) +∞; 4) 0; 5) 0; 6) +∞; 7) 1; 8) $-\frac{2}{3}$; 9) 1; 10) –1;

11) +∞; 12) – ∞; 13) $\frac{1}{2}$; 14) –1;

15) a) $l^+=0$, $l^-=0$; existe el límite;
b) $l^+=3$, $l^-=3$; existe el límite;
c) en $x_1=-1$: $l^+=1$, $l^-=2$, no existe el límite
en $x_2=0$: $l^+=0$, $l^-=0$, existe el límite
en $x_3=1$: $l^+=2$, $l^-=1$, no existe el límite



D) ***Cocientes de polinomios***

1) $\frac{1}{2}$; 2) 2; 3) ∞; 4) $\frac{9}{7}$; 5) $-\frac{2}{5}$; 6) $\frac{11}{5}$; 7) $\frac{5}{8}$; 8) $\frac{3}{16}$; 9) $n.i^{n-1}$;

10) 0; 11) $2a$; 12) 4; 13) $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=-2$, $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\infty$

Trigonométricos

1) 3; 2) $\frac{5}{2}$; 3) 1; 4) $\frac{1}{2}$; 5) 4; 6) 1; 7) $\frac{2}{3}$; 8) $\frac{3}{5}$; 9) $\frac{8}{5}$; 10) 0;

11) 0; 12) –1; 13) $\frac{1}{2}$; 14) $\frac{27}{2}$; 15) 2 cos a; 16) $\sqrt{2}$; 17) $\sqrt{2}$;

18) –1 19) $\frac{13}{3}$ 20) 0

Irracionales

1) $2\sqrt{2}$; 2) -2; 3) $-\frac{1}{3}$; 4) 1; 5) $\frac{1}{2}$; 6) 0 ; 7) $\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}$; 8) 0; 9) 6;

10) 1; 11) $-\frac{1}{56}$ 12) 0; 13) 2; 14) $\frac{2\sqrt{2}}{5}$ 15) a 16) 2 17) $-\frac{3}{2}$

E) 1) $\frac{2}{3}$; 2) ∞; 3) 0; 4) 0 ; 5) ∞ ; 6) $\frac{5}{4}$; $-\frac{5}{2}$; 7) $\frac{11}{13}$; 8) $\frac{9}{7}$;

9) $-\frac{2}{5}$; 10) 1; $+\infty$; 11) 1; -1; 12) 3; 3; 13) $\frac{1}{2}$; 14) ∞

F) 1) ∞; 2) 0; 3) 3; 4) $\frac{3}{2}$; 5) 1; 6) $\frac{5}{2}$; 7) $-\infty$; 8) ∞; 9) ∞

G) 1) $e^{3/2}$; 2) e^4; 3) e^{-4}; 4) e^2; 5) e^{15}; 6) $e^{-2/7}$; 7) e^2; 8) e^4; 9) e^{12}; 10) e^2; 11) e; 12) e^6

H)

1) 0, es el producto de un infinitésimo por una función acotada.
2) el límite es 0 por estar la función comprendida entre dos funciones que tienen límite 0.

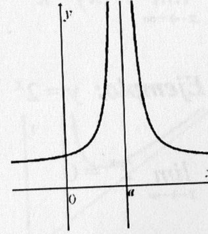
3) $\frac{q}{p}$ 4) $k=1$ 5) $|x|<1 \Rightarrow l=\frac{6-x^2}{4+x^2}$ $|x|\geq 1 \Rightarrow l=1$

6) g es un infinitésimo de orden superior en $x=0$.
7) V, ambos dan 0.
8) $k=2$.

ASÍNTOTAS

Si la distancia entre una recta y un punto deslizable de una curva tiende a cero cuando x tiende a infinito o a un punto x= a, la recta recibe el nombre de asíntota.

Asíntota vertical

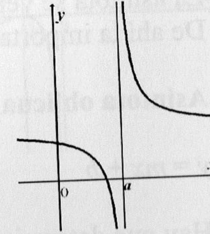


Son rectas verticales de ecuación $x = a$.

$x = a$ es una asíntota vertical $\Leftrightarrow$

$\lim_{x\to a} f(x)=\infty$

Diversificación:

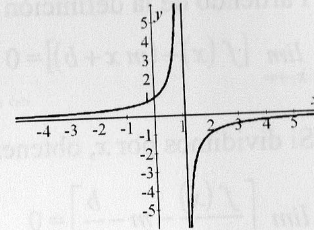


$\lim_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty$ $\lim_{x\to a^-} f(x)=\pm\infty$

La diversificación ayuda a ver el comportamiento de la curva ante la asíntota.

En las funciones racionales hay que investigar los valores de x que anulan el denominador, pero atención que no deben anular el numerador.

Ejemplo: $y=-\frac{1}{x-1}$



$x=1$ $\lim_{x\to 1} -\frac{1}{x-1}=\infty$

$\lim_{x\to 1^+} -\frac{1}{x-1}=-\infty$ $\lim_{x\to 1^-} -\frac{1}{x-1}=+\infty$

Asíntota horizontal

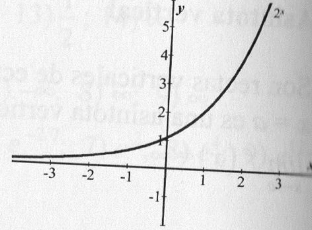
Son rectas horizontales de ecuación $y = k$.

$y = k$ es asíntota horizontal $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = k$

Diversificación:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = k \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = k$

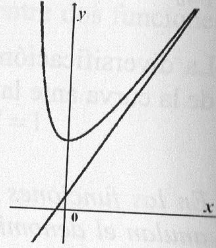
Ejemplo: $y = 2^x$



$\lim\limits_{x\to-\infty} 2^x = 0 \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} 2^x = +\infty$

La asíntota se verifica cuando $x \to -\infty$, no cuando $x \to +\infty$. De ahí la importancia de la diversificación.

Asíntota oblicua



$y = mx + b$

Hay que determinar cuánto vale m y cuánto vale b.

Cálculo de m

Partiendo de la definición general de asíntota en este caso resulta:

$\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$.

Si dividimos por x, obtenemos otro infinitésimo, por lo tanto

$$\lim_{x\to\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - m - \frac{b}{x}\right] = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - m\right] = 0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x\to\infty} m = 0 \text{, finalmente}$$

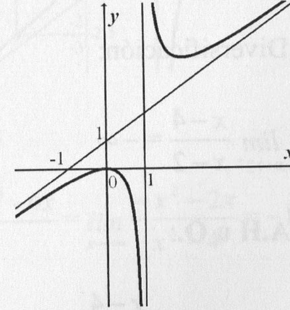
$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$$

Cálculo de b

$\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - mx - b] = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - mx] - \lim\limits_{x\to\infty} b = 0$,

luego $b = \lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - mx]$

Ejemplo: $y = \dfrac{x^2}{x-1}$



$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2 - x} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x^2 + x}{x-1} = 1$$

La asíntota oblicua es $y = x+1$

Podemos calcular también la asíntota vertical

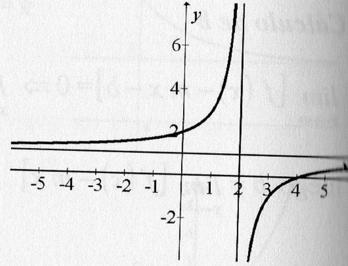
$x = 1 \qquad \lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2}{x-1} = \infty$

$\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{x^2}{x-1} = +\infty \qquad \lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{x^2}{x-1} = -\infty$

Ejercicios Generales Resueltos

1) Calcular asíntotas de

a) $f(x)=\dfrac{x-4}{x-2}$



A.V.: $x=2$, posible asíntota vertical

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-4}{x-2}=\infty \Rightarrow x=2$ es una A.V.

Diversificación:

$\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-4}{x-2}=-\infty \qquad \lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x-4}{x-2}=+\infty$

A.H u O.:

$m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-4}{x^2-2x}=0$

$b=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-4}{x-2}-0=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-4}{x-2}=1\Rightarrow$ A.H: $y=1$

b) $f(x)=\dfrac{x^3-x^2-6x}{x^2-4}$

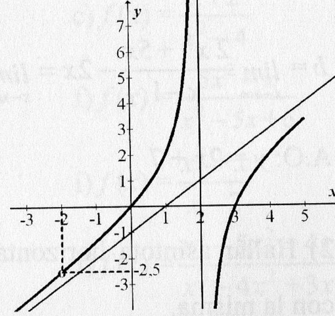
A.V.: $x=2,\ x=-2$, posibles asíntotas verticales

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-x^2-6x}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x.(x-3)(x+2)}{(x-2).(x+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x.(x-3)}{x-2}=\infty$

$\Rightarrow x=2$ es una A.V.

$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3-x^2-6x}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x.(x-3)(x+2)}{(x-2).(x+2)}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x.(x-3)}{x-2}=\dfrac{10}{-4}=-\dfrac{5}{2}$

$\Rightarrow x=-2$ no es una A.V.



Diversificación:

$\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^3-x^2-6x}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x.(x-3)}{x-2}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^3-x^2-6x}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x.(x-3)}{x-2}=+\infty$

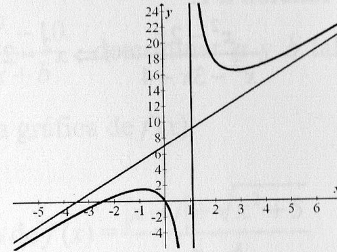
A.H u O.:

$m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-x^2-6x}{x^3-4x}=1$

$b=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-x^2-6x}{x^2-4}-x=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-x^2-6x-x^3+4x}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^2-2x}{x^2-4}=-1$

A.O: $y=x-1$

c) $f(x)=\dfrac{2x^2+5x}{x-1}$



A.V.: $x=1$, posible asíntota vertical

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+5x}{x-1}=\infty \Rightarrow x=1$ es una A.V.

Diversificación:

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x^2+5x}{x-1}=+\infty \qquad \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x^2+5x}{x-1}=-\infty$

A.H u O.:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+5x}{x^2-x}=2$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+5x}{x-1}-2x=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+5x-2x^2+2x}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{7x}{x-1}=7$$

A.O: $y=2x+7$

2) Hallar asíntota horizontal de: $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x^2-3x-4}$ y su intersección con la misma.

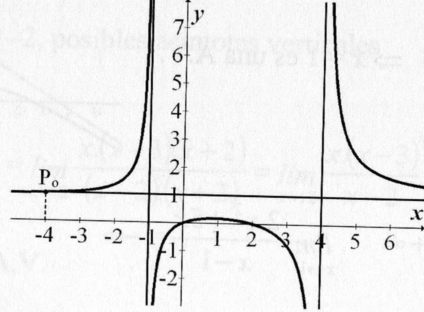
Debemos verificar que tiene asíntota horizontal, calculamos el límite.

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x}{x^2-3x-4}\left(\dfrac{\to\infty}{\to\infty}\right)=1$, por ser el cociente de polinomios del mismo grado con igual coeficiente principal.

A.H.: $y=1$

Para buscar la intersección entre la curva y la asíntota igualamos la función a 1.

$\dfrac{x^2-2x}{x^2-3x-4}=1\Rightarrow x^2-2x=x^2-3x-4\Rightarrow x_1=-4\therefore P_0=(-4;1)$



EJERCICIOS PROPUESTOS

1) Hallar asíntotas lineales de las siguientes funciones e indicar Dom.

a) $f(x)=\dfrac{x+2}{x-6}$ b) $f(x)=\dfrac{2x+2}{x-4}$ c) $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-4}$

d) $f(x)=\dfrac{x^3+3x}{x^2-4}$ e) $f(x)=\dfrac{2x^2-3x^3}{x^2-1}$ f) $f(x)=\dfrac{5x^2-x}{x^2-5x+6}$

g) $f(x)=\dfrac{2x^2+x}{3x}$ h) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$ i) $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x-2}$

j) $f(x)=\dfrac{x^3-8}{4-x^2}$ k) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}-x$ l) $f(x)=\dfrac{x^3-5x^2+4x}{x^3-4x^2+3x}$

m) $f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{2(x+1)}$ n) $f(x)=2x-\sqrt{x^2+1}$ o) $f(x)=3x-5x^{2/3}$

p) $f(x)=\dfrac{3x^2+sen\,(2x)}{x+5}$ q) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+16}}{|x+1|}$ r) $f(x)=ln\,\dfrac{2-x}{2+x}$

2) Hallar asíntota horizontal de $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{1/x}}$

3) Hallar una función que tenga asíntota vertical $x=3$ y asíntota oblicua $y=x+4$.

4) Dada la función f: $A\to\mathbb{R}\ /\ f(x)=\dfrac{2x^2-10}{ax+b}$, determinar a y b tal que $y=\dfrac{x}{3}+2$ sea asíntota oblicua de la gráfica de $f(x)$.

5) Hallar asíntota horizontal por izquierda de $f(x)=\dfrac{|x-7|+\sqrt{x^2+5}}{x-4}$

RESPUESTAS

1) a) A.V.: $x = 6$	A.H.: $y = 1$	Dom = $\Re - \{6\}$
b) A.V.: $x = 4$	A.H.: $y = 2$	Dom = $\Re - \{4\}$
c) A.V.: $x = 2$	A.H.: $y = 0$	Dom = $\Re - \{2; -2\}$
d) A.V.: $x = 2, x = -2$	A.O.: $y = x$	Dom = $\Re - \{2; -2\}$
e) A.V.: $x = 1, x = -1$	A.O.: $y = -3x + 2$	Dom = $\Re - \{1; -1\}$
f) A.V.: $x = 3, x = 2$	A.H.: $y = 5$	Dom = $\Re - \{2;3\}$
g) A.O.: $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$		Dom = $\Re - \{0\}$
h) A.O.: $y = x-1$		Dom = $\Re - \{-1\}$
i) A.V.: $x = 2$	A.O.: $y = x + 3$	Dom = $\Re - \{2\}$
j) A.V.: $x = -2$	A.O.: $y = -x$	Dom = $\Re - \{2; -2\}$
k) A.V.: $x = 1$	A.O.: $y = -x$	Dom = $\Re - \{1\}$
l) A.V.: $x = 3$	A.H.: $y = 1$	Dom = $\Re - \{0;1;3\}$
m) A.V.: $x = -1$	A.O.: $y = \frac{1}{2}x - 3$	Dom = $\Re - \{-1\}$
n) A.O.: $y = x$; $y = 3x$		Dom = $\Re$
o) No tiene asíntotas lineales		Dom = $\Re$
p) A.O.: $y = 3x - 15$	A.V.: $x = -5$	Dom = $\Re - \{-5\}$
q) A.V.: $x = -1$	A.H.: $y = 1$	Dom = $\Re$
r) no tiene asíntotas		

2) A.H.: $y = \frac{1}{2}$ 3) $f(x) = \frac{x^2 + x}{x - 3}$ 4) $a = 6, b = -36$ 5) $y = -2$

Capítulo 4

Continuidad

Función continua en un punto y en un intervalo.

Definición, ejemplos.

Discontinuidades. Clasificación, ejemplos.

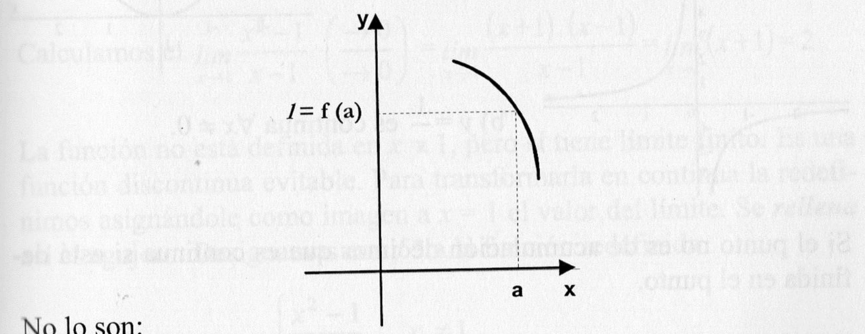
Propiedades: Teorema de Bolzano,

Teorema del valor medio, Teoremas de Weierstrass.

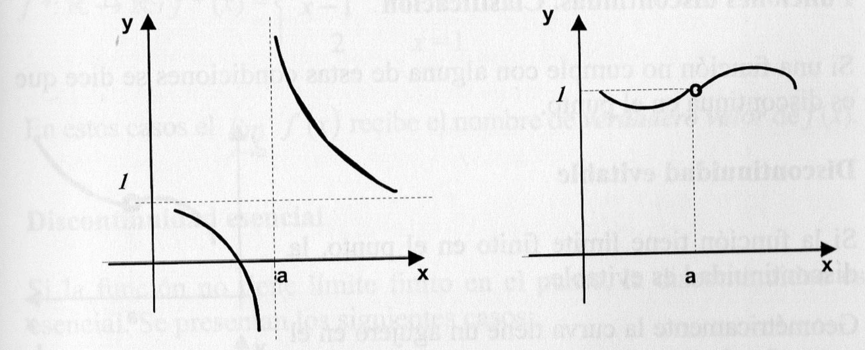
Algebra de las funciones continuas.

CONTINUIDAD

La continuidad de una función está asociada intuitivamente al concepto de que su gráfica no tenga interrupciones, ya sea agujeros o saltos. Es continua:



No lo son:



Las condiciones que debe cumplir una función para ser continua en un punto $x = a$ de acumulación de su dominio son:

1) Que exista $f(a)$ ($a \in \text{Dom} f$)

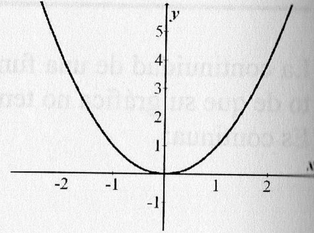
2) Que exista l y sea finito en el punto.

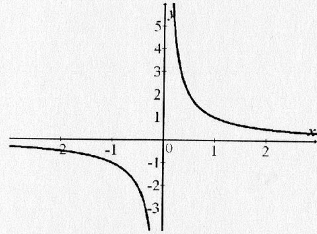
3) $f(a) = l$

Estas tres condiciones se pueden resumir en una sola: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Ejemplos

a) $y = x^2$ es continua en todo su dominio, es decir $\forall x \in \mathbb{R}$.





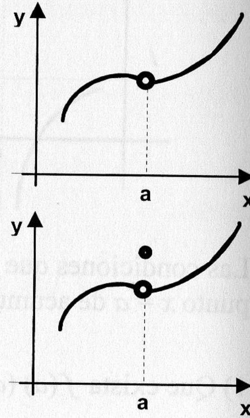
b) $y = \dfrac{1}{x}$ es continua $\forall x \neq 0$.

Si el punto no es de acumulación decimos que es continua si está definida en el punto.

Funciones discontinuas. Clasificación

Si una función no cumple con alguna de estas condiciones se dice que es discontinua en el punto.

Discontinuidad evitable



Si la función tiene límite finito en el punto, la discontinuidad es evitable.

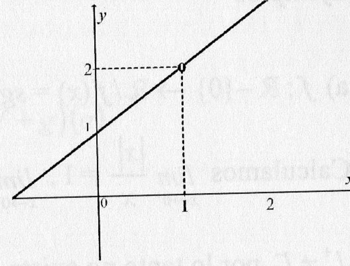
Geométricamente la curva tiene un agujero en el punto. La función se puede transformar en continua redefiniéndola, considerando como imagen del punto el valor del límite. La función puede o no tener estar definida en el punto.

Redefinimos la función, la denominamos f^*.

$$f^*: \mathbb{A} \to \mathbb{R} \,/\, f^*(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq a \\ l & x = a \end{cases}$$

Ejemplo

$f: \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ en $x = 1$.



Vemos que no existe $f(1)$.

Calculamos el $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} \left(\dfrac{\to 0}{\to 0} \right) = \lim_{x \to 1} \dfrac{(x+1).(x-1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x+1) = 2$

La función no está definida en $x = 1$, pero sí tiene límite finito. Es una función discontinua evitable. Para transformarla en continua la redefinimos asignándole como imagen a $x = 1$ el valor del límite. Se ***rellena*** así el agujero. Designamos con f^* a la función redefinida.

$$f^*: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f^*(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$$

En estos casos el $\lim_{x \to a} f(x)$ recibe el nombre de ***verdadero valor*** de $f(x)$.

Discontinuidad esencial

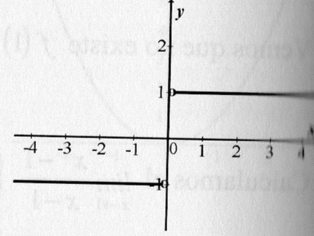
Si la función no tiene límite finito en el punto, la discontinuidad es esencial. Se presentan los siguientes casos:

$$\textit{esencial:} \begin{cases} 1^\circ \textit{ especie} \begin{cases} \textit{salto finito}: l^+ \neq l^- \\ \textit{salto infinito}: l^+ \textit{ o } l^- \textit{ infinito} \end{cases} \\ 2^\circ \textit{ especie}: l^+ \textit{ o } l^- \textit{ no existen} \end{cases}$$

Ejemplos

a) $f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}\,/\,f(x)=sg\,x=\dfrac{|x|}{x}$ en el origen. $\nexists\, f(0)$.

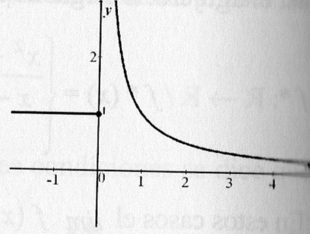
Calculamos $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{|x|}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{|x|}{x}=-1$,



$l^+\neq l^-$ por lo tanto no existe el límite.

f es discontinua esencial de 1° especie con salto finito. El valor del salto es la diferencia, en valor absoluto, entre los límite laterales. En este caso vale 2.

b) $f(x)=\begin{cases}1 & x\le 0\\ \dfrac{1}{x} & x>0\end{cases}$, en el origen.



$f(0)=1$. Vamos a analizar el límite en el origen. Como la función a izquierda y derecha está definida de distinta forma, debemos recurrir a los límites laterales.

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}1=1$,

No existe el l en $x=0$ por lo tanto la función presenta una discontinuidad esencial de 1° especie con salto infinito.

Álgebra de Funciones Continuas

Si f y g son funciones continuas en $x=a$ entonces:

a) $f\pm g$ es continua en $x=a$
b) $f\,.\,g$ es continua en $x=a$
c) $f:g$ es continua en $x=a$ si $g(a)\neq0$.

Demostramos la propiedad a):

$\lim\limits_{x\to a}[(f+g)(x)]=\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]=$

$=\lim\limits_{x\to a}f(x)+\lim\limits_{x\to a}g(x)=f(a)+g(a)=(f+g)(a)$

Consecuencias

a) Toda función polinómica es continua en reales.
b) Una función racional es continua en todos los puntos en los cuales el denominador no se anula.

Continuidad de la Función Compuesta

Si f y g son dos funciones para las cuales $\operatorname{Im} g\subseteq \operatorname{Dom} f$ y g es continua en $x=a$ y f es continua en $g(a)$ entonces $(f\circ g)(x)$ es continua en $x=a$.

Continuidad en un Conjunto

Una función es continua en un conjunto de puntos A si y sólo si es continua en cada punto de ese conjunto:

f continua en A $\Leftrightarrow \forall x: (x\in A\Rightarrow f$ es continua en $x)$

Continuidad en un Intervalo Cerrado [*a;b*]

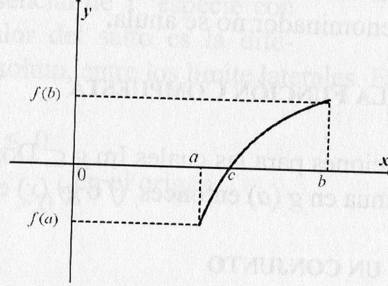
Una función es continua en un intervalo cerrado $[a;b]$ si lo es en el intervalo $(a;b)$, $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a)$ y $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=f(b)$.

PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CONTINUAS EN UN INTERVALO CERRADO

1) *Teorema de Bolzano*

Si una función es continua en el intervalo $[a;b]$ y toma en los extremos del mismo valores $f(a)$ y $f(b)$ de signos opuestos, entonces se anula por lo menos en un punto interior al intervalo $[a;b]$.

Lo que significa que $\exists\, c \in (a;b) \,/\, f(c) = 0$.

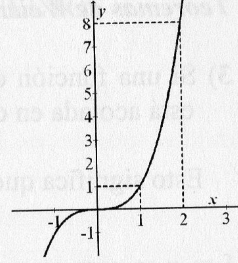


BOLZANO, *Bernhard (1781-1848):* sacerdote, filósofo y matemático checoslovaco de origen italiano, contemporáneo de Cauchy. En 1805 enseñó filosofía en la Universidad de Praga. Entre sus Principales obras está Teoría de la Ciencia.
En 1817 publica *Rein Analytischer Beweis* (Una Prueba Pura Analítica), que contiene un esfuerzo exitoso de librar al cálculo del concepto del infinitesimal. En esta obra enuncia el teorema que lleva su nombre: *Si una función en continua en el intervalo [a, b] y toma valores de signo opuesto en los extremos, entonces existe al menos un punto interior c del intervalo en el que se anula la función.* Este teorema tiene una interesante aplicación en la localización de las raíces o ceros de una función continua. En el prólogo dice *Bolzano* que esta es una nueva forma de desarrollar el Análisis.



Unicidad: si además la función es inyectiva, la raíz es única.

Ejemplo: $f(x) = x^3$ en $[-1;2]$

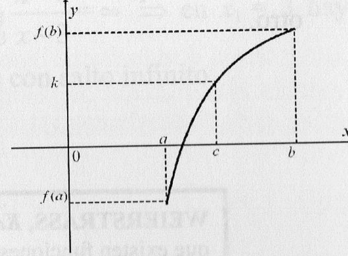


La función $f(x) = x^3$ es continua por ser polinómica. Además $f(-1) = -1$ y $f(2) = 8$, es decir que toma valores de signos opuestos en los extremos del intervalo. El teorema garantiza entonces la existencia de al menos un punto interior al intervalo en el cual se anula.

Pero también se verifica que $f(x) = x^3$ es inyectiva, por lo tanto el valor en el cual se anula la función es único. En este caso en $x = 0$.

2) *Teorema del valor intermedio*

Sea $y = f(x)$ una función continua en $[a;b]$ y k un valor intermedio entre $f(a)$ y $f(b)$, $[f(a) \neq f(b)]$ entonces existe un punto c interior a $(a;b) \,/\, f(c) = k$.



Dem.: consideramos una función auxiliar $F(x) = f(x) - k$.
$F(x)$ es continua en $[a;b]$.

$F(a) = f(a) - k$, como $f(a) < k \Rightarrow F(a) < 0$
$F(b) = f(b) - k$, como $f(b) > k$, $F(b) > 0 \Rightarrow F(a)$ y $F(b)$ tienen signos opuestos entonces (por Teorema de Bolzano) $\exists c \in (a;b) \,/ F(c) = 0$.
Pero $F(c) = f(c) - k \Rightarrow f(c) = k$.

El teorema de Bolzano se puede considerar como un caso particular de éste si $k = 0$.

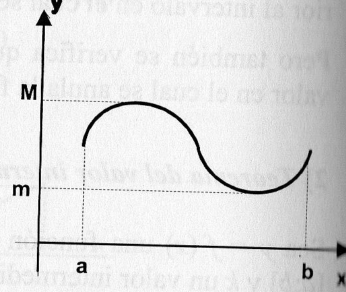
Nota: si $f(a) = f(b)$ no se cumple la hipótesis del teorema porque no existe k.

Teoremas de Weierstrass

3) Si una función es continua en un intervalo cerrado $[a;b]$ entonces está acotada en dicho intervalo.

Esto significa que el conjunto imagen tiene ínfimo y supremo.

4) Toda función continua en un intervalo cerrado alcanza en él un valor máximo absoluto M que no es superado por ningún otro y un valor mínimo absoluto m que no supera a ningún otro.



WEIERSTRASS, *Karl (1815-1897)*: matemático alemán, demostró que existen funciones continuas no derivables.



Después de pasar cuatro infructuosos años en la Universidad de Bonn estudiando derecho, ingresó a la Academia de Filosofía y Teología en Münster para seguir la carrera de maestro secundario.
Se interesó allí por la Matemática y, en particular, por el estudio de las *funciones elípticas* de su profesor *Gudermann* que basaba todas las cosas en el desarrollo en *serie de potencias de las funciones*.
Así *Weierstrass* solía exclamar: *No hay otra cosa que las series de potencias*.
Conocido como *el padre del Análisis Moderno*, *Weierstrass* dispuso los cimientos para aritmetizar el Análisis Matemático a través de rigurosos desarrollos del sistema de números reales.

Ejercicios Generales Resueltos

1) Analizar la continuidad de:

a) $y = \dfrac{x^2-9}{x^2-6x+9}$

Debemos analizar los puntos de discontinuidad, en este caso es $x_1 = 3$, que anula el denominador.

Ya sabemos que $f(3)$ no existe, para saber que tipo de discontinuidad hay en $x_1 = 3$ calculamos el

$\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x^2-6x+9} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(x+3).(x-3)}{(x-3)^2} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x+3}{x-3} = \infty \Rightarrow$ en $x_1 = 3$ hay una discontinuidad esencial de 1° especie con salto infinito.

b) $y = \dfrac{x-2}{(x^2-4).(x+3)}$

Debemos analizar los puntos de discontinuidad, en este caso son $x_1 = -3$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$, que anulan el denominador. Ya sabemos que en esos puntos no hay imagen. Para saber que tipo de discontinuidad hay en cada punto calculamos los límites.

$\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x-2}{(x^2-4).(x+3)} \left(\dfrac{-5}{\to 0}\right) = -\infty \Rightarrow$ en $x_1 = -3$ hay una discontinuidad esencial de 1° especie con salto infinito.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{(x^2-4).(x+3)} \left(\frac{\to 0}{\to 0}\right)$$

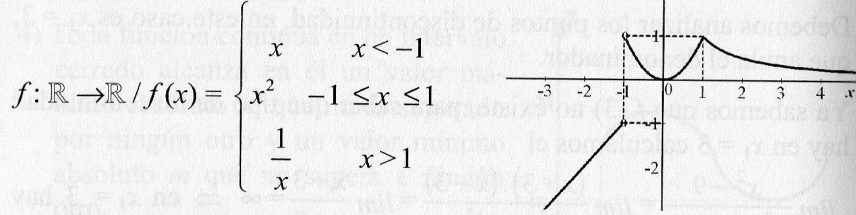
$$\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{(x+2).(x-2).(x+3)} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{(x+2).(x+3)} = \frac{1}{20}$$

Por lo tanto en $x_2 = 2$ hay una discontinuidad evitable.

$\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x-2}{(x^2-4).(x+3)} \left(\dfrac{-4}{\to 0}\right) = -\infty \Rightarrow$ en $x_3 = -2$ hay una discontinuidad esencial de 1º especie con salto infinito.

2) Analizar continuidad de:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \,/\, f(x) = \begin{cases} x & x<-1 \\ x^2 & -1\le x\le 1 \\ \dfrac{1}{x} & x>1 \end{cases}$$



Los puntos donde puede haber discontinuidades son los puntos donde cambia la definición de la función, $x_1 = -1$ y $x_2 = 1$. Por haber cambio en la definición debemos recurrir a los límites laterales.

$\underline{x_1 = -1}$ $f(-1) = 1$ $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} x^2 = 1$

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} x = -1$

En $x_1 = -1$ hay discontinuidad esencial de 1º especie con salto finito = 2.

$\underline{x_2 = 1}$ $f(1) = 1$ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x^2 = 1 \Rightarrow f$ es continua

3) Determinar y clasificar los puntos de discontinuidad de

$$f(x) = \frac{3}{e - e^{\frac{1}{x+1}}}$$

Una discontinuidad se produce en $x_1 = -1$ porque se anula el denominador del exponente de e. Sabemos que en ese punto la función no tiene imagen. Debemos calcular los límites laterales en ese punto:

$\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{3}{e - e^{\frac{1}{x+1}}} \left(\dfrac{3}{\to -\infty}\right) = 0$ y $\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{3}{e - e^{\frac{1}{x+1}}} = \dfrac{3}{e-0} = \dfrac{3}{e}$

entonces en $x_1 = -1$ existe una discontinuidad esencial de 1º especie con salto finito = $3/e$.

La otra discontinuidad se produce en $x = 0$, porque se anula el denominador de la función.

Calculamos el límite: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3}{e - e^{\frac{1}{x+1}}} \left(\dfrac{3}{\to 0}\right) = \infty$

entonces en $x_2 = 0$ la función presenta una discontinuidad esencial de 1º especie con salto infinito.

4) Determinar y clasificar los puntos de discontinuidad de

$$f(x) = (x+1).arc\,tg\,\frac{1}{1-x^2}$$

La discontinuidad se produce en $x_1 = 1$ y $x = -1$ porque se anula el denominador. Debemos calcular los límites laterales en ambos puntos. Ya sabemos que la función no tiene imagen en esos puntos.

$\lim\limits_{x\to 1^+} \left[(x+1).arc\,tg\,\dfrac{1}{1-x^2}\right] = 2.\left(\dfrac{-\pi}{2}\right) = -\pi$

$\lim\limits_{x\to 1^-} \left[(x+1).arc\,tg\,\dfrac{1}{1-x^2}\right] = 2.\dfrac{\pi}{2} = \pi \Rightarrow$ en $x_1 = 1$ la función es discontinua esencial de 1º especie con salto finito = 2π.

$\lim\limits_{x\to -1^+} \left[(x+1).arc\,tg\,\dfrac{1}{1-x^2}\right] = 0.\dfrac{\pi}{2} = 0$

$\lim\limits_{x\to -1^-} \left[(x+1).arc\,tg\,\dfrac{1}{1-x^2}\right] = 0.\left(\dfrac{-\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow$ en $x_2 = -1$ la función presenta una discontinuidad evitable.

5) Determinar a y b para que f sea continua en $\mathbb{R}$.

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & x<1 \\ ax+b & 1\leq x\leq 2 \\ 3x & x>2 \end{cases}$$

Los puntos que hay que analizar son aquellos en los que la función cambia su definición. Los límites laterales deben ser iguales para que la función tenga límite y pueda ser continua.

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(ax+b)=a+b \quad \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x+1)=2$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(3x)=6 \quad \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(ax+b)=2a+b$

De analizar estos límites surge que $\begin{cases} a+b=2 \\ 2a+b=6 \end{cases} \Rightarrow a=4, b=-2.$

Si $a=4$, $b=-2$, también se verifica que

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)\wedge \lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$.

Por lo tanto la función es continua.

6) Determinar para que valores enteros de k es continua:

$$f(x)=\begin{cases} x^k.\cos\dfrac{2\pi}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

El único punto en el que puede haber problemas es $x=0$. La función está definida en $x_1=0$. Debemos ver que ocurre con el límite.

$\lim\limits_{x\to 0}\left(x^k.\cos\dfrac{2\pi}{x}\right)$, tenemos el producto de un infinitésimo por una función acotada siempre que x^k tienda a 0. Esto ocurre si $k>0$. Por lo tanto la función es continua $\forall k>0$.

7) $\forall x\in E^*(0;h)$: $g(x)=f(x)$, f es continua en $x_1=0$ y $g(x)=\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$.

Calcular $f(0)$. Justificar.

Si f es continua en $x_1=0 \Rightarrow f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Por ser $g(x)=f(x)$.

$\forall x\in E^*(0;h)$: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} g(x)\Rightarrow f(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}\left(\begin{matrix}\to 0\\ \to 0\end{matrix}\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\sqrt{\cos x}\right).\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}{x^2.\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2.\left(1-\sqrt{\cos x}\right)}\left(\begin{matrix}\to 0\\ \to 0\end{matrix}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x).(1+\cos x)}{x^2.\left(1+\sqrt{\cos x}\right).(1+\cos x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{sen^2 x}{x^2}.\frac{1}{\left(1+\sqrt{\cos x}\right).(1+\cos x)}=1.\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

8) Sea $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}+a & x\leq -1 \\ -x+b & -1<x\leq 2 \\ \dfrac{a}{x}-c & x>2 \end{cases}$

Determinar los valores de a, b y c tal que f resulte continua en reales y la recta $y=-3$ sea asíntota para $x\to+\infty$.

Buscamos los valores de a, b y c para que sea continua en los puntos conflictivos, $x_1=-1$ y $x_2=2$.

$\underline{x_1=-1}$

$f(-1)=-1+a$

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{1}{x}+a\right)=-1+a \quad \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}(-x+b)=1+b$

$-1+a=1+b \Rightarrow a-b=2$ (1)

$\underline{x_2 = 2}$

$f(2) = -2 + b$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(-x+b) = -2+b \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}\left(\frac{a}{x} - c\right) = \frac{a}{2} - c$

$-2 + b = \frac{a}{2} - c \;\Rightarrow\; a - 2b - 2c = -4 \quad (2)$

Para que la recta $y = -3$ sea asíntota debe cumplirse que:

$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{a}{x} - c\right) = -3 \;\Rightarrow\; c = 3 \quad (3)$

De (1), (2) y (3) surge que $\begin{cases} a - b = 2 \\ a - 2b - 2c = -4 \\ c = 3 \end{cases}$,

por lo tanto $a = 2$, $b = 0$ y $c = 3$.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1) Analizar la continuidad de las siguientes funciones en los puntos indicados. Clasificar las discontinuidades y graficar las funciones.

a) $f(x) = \begin{cases} -x+1 & -2 < x \le 0 \\ x^2 & x > 0 \end{cases}$ en $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$

b) $f(x) = \begin{cases} -1 & x < -1 \\ x^2 & -1 < x < 1 \\ x & x > 1 \end{cases}$ en $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$

c) $f(x) = \begin{cases} x+1 & x \le -1 \\ x^2+1 & -1 < x < 2 \\ x+3 & x \ge 2 \end{cases}$ en $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$

d) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & x \le 0 \\ \frac{1}{x} & x > 0 \end{cases}$ en $x_1 = 0$, $x_2 = 2$

e) $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ en $x_1 = 1$

f) $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2-4}$ en $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$

2) Analizar en cada una de las siguientes funciones las discontinuidades que presentan, clasificarlas y graficar las funciones.

a) $f(x) = \begin{cases} x & x \ge 2 \\ 2 & x < 2 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} 3+x & x \le 1 \\ 3-x & x > 1 \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-2} & x\neq 2\\ 3 & x=2\end{cases}$ d) $f(x)=\begin{cases}-4 & x<-2\\ \dfrac{8}{x-2} & -2<x<6\\ 2x-10 & x>6\end{cases}$

3) Analizar en cada una de las siguientes funciones las discontinuidades que presentan y clasificarlas.

a) $f(x)=\dfrac{sen\ x}{x}$ b) $f(x)=sen\ \dfrac{\pi}{x}$ c) $f(x)=x$

d) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ e) $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2-2x-3}$

f) $f(x)=\dfrac{x-4}{(x+3).(x^2-16)}$ g) $f(x)=\dfrac{x^2+5x+6}{x^3+2x^2-3x}$

h) $f(x)=\dfrac{|x-3|}{x-3}$ i) $f(x)=\dfrac{x^3-27}{x-3}$ j) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 5 & x=0\end{cases}$

4) Es posible definir $f(1)$ para que $f(x)=\dfrac{x.(x-1)}{x^2-1}$ sea continua en $x_1=1$?

5) Definir, si es posible, $f(2)$ para que $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-4}$ sea continua en $x_1=2$.

6) Definir, si es posible $f(0)$ para que $f(x)=x.sen\dfrac{\pi}{x}$ sea continua en el origen.

7) Definir una función que presente dos discontinuidades evitables y una esencial con límite finito.

8) Determinar los reales a, b y $g(x)$ tales que f sea continua en $\mathbb{R}$ si:

$$f(x)=\begin{cases}g(x).sen\dfrac{1}{x^2-3x-18} & x\in\Re-\{a;b\}\\ 0 & x\in\{a;b\}\end{cases}$$

9) Hallar k para que las siguientes funciones sean continuas en los puntos indicados.

a) $h(x)=\begin{cases}\dfrac{sen\ (x^2-5x+4)}{x-4} & x\neq 4\\ k & x=4\end{cases}$ en $x_1=4$

b) $g(x)=\begin{cases}3x^2+k & x>k\\ -x^2-3k-1 & x\leq k\end{cases}$ en $x_1=k$

c) $g(x)=\begin{cases}(1+kx)^{3/x} & x\neq 0\\ e^{-k^2+4} & x=0\end{cases}$ en $x_1=0$

d) $g(x)=\begin{cases}\dfrac{sen\ kx}{x} & x\neq 0\\ -k^2+2 & x=0\end{cases}$ en $x_1=0$

10) Dada $f: D_f\rightarrow\mathbb{R}\ /\ f(x)=\dfrac{\sqrt{x^3-5x^2+8x-4}}{x-2}$, analizar la existencia de discontinuidades.

11) Analizar si las siguientes funciones verifican las hipótesis del teorema de Bolzano en los intervalos indicados.

a) $f(x)=x^3+2x^2-x-3$ en $[0;2]$

b) $f(x)=x^3+\dfrac{1}{x}+3$ en $[-2;2]$ c) $f(x)=x^2+x+3$ en $[1;3]$

12) Dadas las siguientes funciones verificar si cumplen con las hipótesis del teorema del valor intermedio. Si así fuese hallar c para los valores de k indicados.

a) $f(x) = x^2 + x + 1$ en $[-1;3]$ para $k = 3$.

b) $f(x) = \dfrac{2}{2-x}$ en $[0;3]$ para $k = -1$

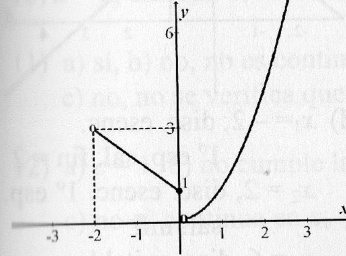
c) $f(x) = \begin{cases} -x+1 & -4 < x \leq 0 \\ x^2 & x > 0 \end{cases}$ en $[-3;2]$ para $k = 2$.

d) $f(x) = sen\, x$ en $[0;\pi]$ para $k = \dfrac{1}{2}$

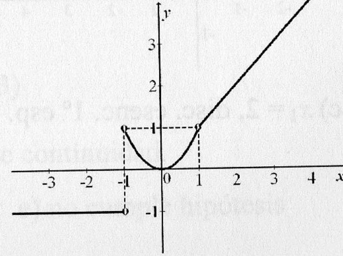
e) $f(x) = \begin{cases} x.sen\dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ en $\left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right]$

RESPUESTAS

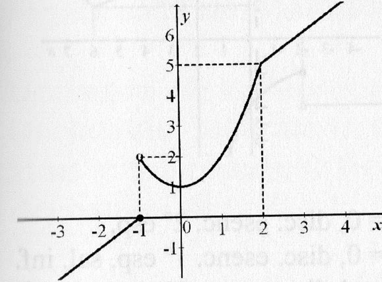
1) a) $x_1 = -1$, continua.
$x_2 = 0$, disc. esenc. 1° esp. sal. fin.=1
$x_3 = 1$, continua



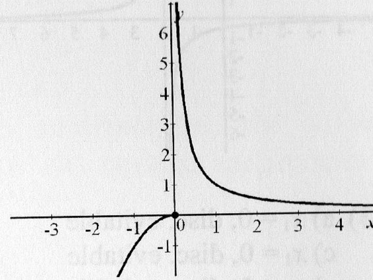
b) $x_1 = -1$, disc. esenc. 1° esp. sal. fin.= 2
$x_2 = 0$, continua
$x_3 = 1$, disc. evitable
$x_4 = 2$, continua



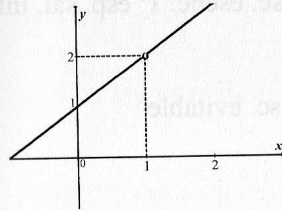
c) $x_1 = -1$, disc. esenc.1° esp.sal.fin.= 2
$x_2 = 0$, continua.
$x_3 = 2$, continua.



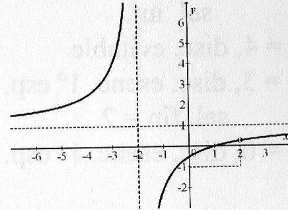
d) $x_1 = 0$, discont. esenc. 1° esp. sal. inf.
$x_2 = 2$, continua.



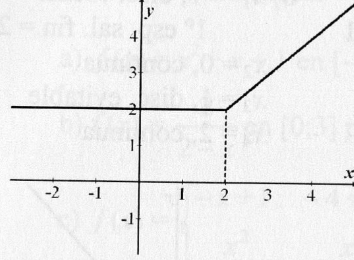
e) x_1=1 disc. evitable



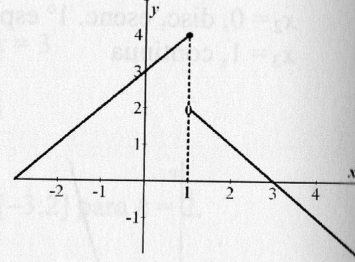
f) x_1= 2 disc. evitable
$x_2 = -2$ disc. esenc. 1° esp. sal. inf.
x_3 =1 cont.



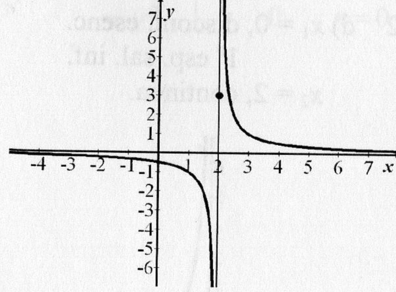
2) a) no presenta discontinuidades



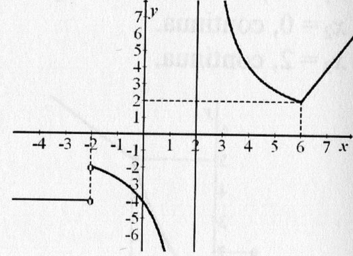
b) $x_1 = 1$, disc. esenc. 1° esp. sal. fin.= 2



c) $x_1 = 2$, disc. esenc. 1° esp. sal. inf.



d) $x_1 = -2$, disc. esenc. 1° esp. sal. fin = 2
$x_2 = 2$, disc. esenc. 1° esp. sal. inf.
$x_3 = 6$, disc. evitable.



3) a) $x_1 = 0$, disc. evitable
b) $x_1 = 0$, disc. esenc. 2° esp.
c) $x_1 = 0$, disc. evitable
d) $x_1 = 0$, disc. esenc. 1° esp. sal. inf.
$x_2 = -1$ disc. esenc. 1° esp. sal. inf.
e) $x_1 = 3$, disc. evitable
f) $x_1 = -4$, disc. esenc. 1° esp. sal. inf.
$x_2 = -3$, disc. esenc. 1° esp. sal. inf.
$x_3 = 4$, disc. evitable
g) $x_1 = -3$, disc. evitable
$x_2 = 0$, disc. esenc. 1° esp. sal. inf.
$x_3 = 1$, disc. esenc. 1° esp. sal. inf.
h) $x_1 = 3$, disc. esenc. 1° esp. sal. fin.= 2
i) $x_1 = 3$, disc. evitable
j) $x_1 = 0$, disc. esenc. 1° esp. sal. inf.

4) $f(1) = \frac{1}{2}$ 5) $f(2) = \frac{1}{4}$ 6) $f(0) = 0$

8) $a = -3, b = 6,\ g(x) = x^2 - 3x - 18$

9) a) $k = 3$ b) $k = -\frac{1}{2}$ c) $k = -4, k = 1$ d) $k = 1, k = -2$

10) $x = 2$, discont. esencial con salto finito = 2.

11) a) sí, b) no, no es continua en $x_0 = 0$,
c) no, no se verifica que $sg\,(1) \neq sg\,(3)$

12) a) $c = 1$, b) no cumple las hipótesis de continuidad.
c) no es continua en $x_1 = 0$, d) $c = \frac{\pi}{6}$ e) no cumple hipótesis

Capítulo 5

Derivadas

Derivada en un punto y función derivada: concepto y definición.

Interpretación geométrica: la recta tangente.

Relación entre la derivabilidad y la continuidad.

Cálculo de las principales funciones derivadas. Algebra de derivadas.

Derivada de la función inversa.
Derivadas laterales: puntos ordinarios, de inflexión y cuspidales. Derivadas de orden superior y derivadas sucesivas.

Derivada de la función implícita.

Recta tangente y recta normal: concepto y cálculo.

Angulo entre dos curvas.

DERIVADAS

Concepto

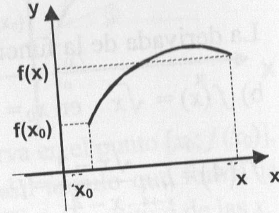
En cursos anteriores hemos estudiado que una variable puede variar en función de otra, así surge el concepto de función. Por ejemplo: a) si un auto se desplaza sobre una recta su posición x es función del tiempo t, es decir que para cada instante t el auto está en una determinada posición x, esto se puede indicar diciendo que $x = f(t)$; b) si un recipiente se está llenando con una canilla, el volumen de agua que hay en el recipiente es función del tiempo, a medida que transcurre el tiempo hay más agua en el recipiente, también se puede decir que $V = f(t)$.

En ambos casos puede interesar la **rapidez de variación** de una variable con respecto a la otra. Por ejemplo, si el móvil del ejemplo a) recorre 50 km en 1 hora la variable posición x varió **más rápido** que si recorrió 30 km en 1 hora. Si en el ejemplo b) abrimos **más** la canilla, el volumen de agua en el recipiente crece **más rápido**. Es decir que nos interesa conocer la velocidad de variación de una variable respecto de la otra, a esta idea está vinculado el concepto de derivada y en general el cálculo diferencial.

El cálculo integral permite resolver el proceso inverso, es decir determinar una función a partir de la información sobre la rapidez con que cambia la variable de la cual depende, por ejemplo: conocida la rapidez con que se desintegra el carbono 14 radiactivo, pudo obtenerse una fórmula que permite calcular la edad de un objeto.

Definición

Consideramos una función $y = f(x)$ definida en un intervalo abierto y un punto $x = x_0$ interior al mismo. Consideramos un incremento de la variable x (Δx), pasamos así del punto x_0 al punto incrementado $x = x_0 + \Delta x$, también interior al intervalo.



Al punto x_0 le corresponde un valor de la función que se denomina $f(x_0)$ y al punto incrementado le corresponde un valor de la función $f(x)$.

Vemos que a un incremento de la variable x, $\Delta x = x - x_0$, le corresponde un incremento de la función $\Delta y = f(x) - f(x_0)$.

Cociente incremental

Procedemos a formar el cociente entre los incrementos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Derivada de una función en un punto

Calculamos el $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$

Dicho límite, si existe, recibe el nombre de derivada de la función $y = f(x)$ en el punto $x = x_0$.
Podemos definir a la derivada de una función en un punto de su dominio como ***el límite del cociente incremental cuando el incremento de la variable independiente tiende a 0***.

Ejemplos: a) $f(x) = x^2 - 3x + 1$ en $x_0 = 2$

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 1 - (-1)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-1).(x-2)}{x - 2} =$$

$$= \lim_{x \to 2} (x - 1) = 1$$

La derivada de la función $f(x) = x^2 - 3x + 1$ en $x_0 = 2$ vale 1.

b) $f(x) = \sqrt{x}$ en $x_0 = 4$

$$f'(4) = \lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} . \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2} = \lim_{x \to 4} \frac{x - 4}{(x - 4).\left(\sqrt{x} + 2\right)} = \frac{1}{4}$$

Función derivada

No es práctico tener que calcular el valor de la derivada para cada punto, es mejor tener una función que a cada valor de x le asigne como imagen el valor de su derivada, esta función recibe el nombre de **función derivada**.

Para calcular la función derivada de una función dada procedemos de la misma forma que para calcular la derivada de una función en un punto, pero en lugar de calcularla para un valor específico de x la calculamos para un valor genérico de x que llamamos x_0. Hay que tener en cuenta que el $Df' \subseteq Df$.

Ejemplo: $f(x) = x^2$

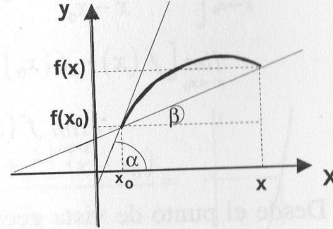
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^{\,2}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x + x_0).(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0$$

Por lo tanto la derivada de $f(x) = x^2$ es $f'(x) = 2x$, y así se pueden calcular las derivadas de distintas funciones.
Una vez que se calcula la función derivada, es posible evaluarla en un punto en particular, por ejemplo si la derivada de $f(x) = x^2$ es $f'(x) = 2x$ entonces: $f'(1) = 2$, $f'(-2) = -4$, $f'(-5) = -10$, etc.

Interpretación geométrica de la derivada

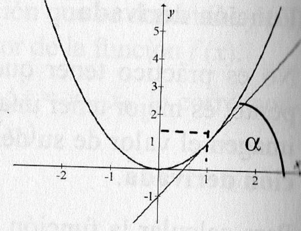
En el gráfico vemos que la $tg\ \beta = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = tg\ \alpha$$



Si $x \to x_0 \Rightarrow \beta \to \alpha$. A medida que $x \to x_0$ la recta secante se va transformando en recta tangente. Por lo tanto la derivada de una función en un punto $x = x_0$ interior al Df mide la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto $[x_0; f(x_0)]$, es decir que mide la tangente trigonométrica del ángulo que forma la recta tangente a la curva en dicho punto con el semieje positivo de las x.

Ejemplo: $f(x) = x^2$, en $x_0 = 1$



$f'(x) = 2x \Rightarrow f'(1) = 2$ lo que significa que la recta tangente a la curva en (1;1) tiene pendiente 2, por lo tanto $\alpha = 63^o\ 26'\ 06''$.
Para cada valor de x_0 la recta tangente a la parábola es distinta y cambia de pendiente.
La derivada en cada punto mide las distintas pendientes, lo cual permite calcular los distintos ángulos que las rectas tangentes forman con el semieje positivo de las x.

Que una función es derivable en un punto implica, desde el punto de vista geométrico, que la curva admite recta tangente en dicho punto.

RELACIÓN ENTRE LA DERIVABILIDAD Y LA CONTINUIDAD

Si f es derivable en un punto x=x₀ entonces es continua en x= x₀.

f es derivable ⇒ f es continua

H) $f'(x_0) = k$

T) $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

D) $\lim_{x \to x_0} \left[f(x) - f(x_0)\right] = \lim_{x \to x_0} \left[\frac{\left[f(x) - f(x_0)\right].(x - x_0)}{x - x_0}\right] =$

$$\lim_{x \to x_0} \left[\frac{\left[f(x) - f(x_0)\right]}{x - x_0}\right] . \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = \left[f'(x_0).0\right] = k.0 = 0$$

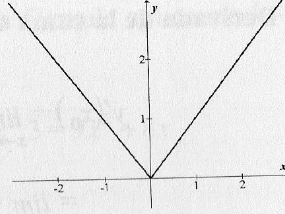
$$\lim_{x \to x_0} \left[f(x) - f(x_0)\right] = 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} f(x_0) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x_0) = f(x_0)$$

Desde el punto de vista geométrico significa que si una curva admite recta tangente en un punto, entonces es continua en ese punto.

Corolario: Si f no es continua entonces no es derivable.

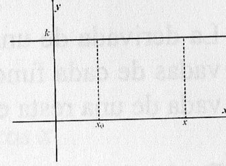
La derivabilidad asegura la continuidad de la función pero la continuidad no asegura la derivabilidad. Como veremos más adelante, hay funciones que son continuas en un punto y no son derivables en él, como por ejemplo $f(x) = |x|$ en el origen.



CÁLCULO DE FUNCIONES DERIVADAS

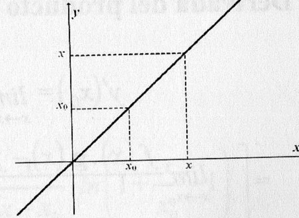
Calculamos ahora las funciones derivadas de algunas funciones:

Derivada de la función constante: $f(x) = k$



$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{k - k}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{0}{x - x_0} = 0 \Rightarrow \forall x : f'(x) = 0$$

Derivada de la función identidad: $y = x$



$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1 \Rightarrow \forall x : f'(x) = 1$$

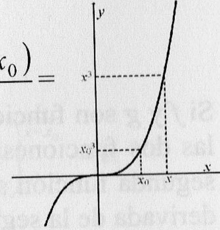
Derivada de $y = k.f(x)$

$$y'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{k.f(x) - k.f(x_0)}{x - x_0} = k.\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k.f'(x_0)$$

$$\Rightarrow \forall x : y'(x) = k.f'(x)$$

Caso particular: $y = kx \Rightarrow y' = k$

Derivada de la función $y = x^3$



$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{x^3 - x_0{}^3}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\left(x^2 + x_0.x + x_0{}^2\right).(x - x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left(x^2 + x_0.x + x_0{}^2\right) = 3x_0{}^2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$$

Derivada de la suma de dos funciones: $y(x)=f(x)+g(x)$

$$y'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{[f(x)+g(x)]-[f(x_0)+g(x_0)]}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)+g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=$$

$$=f'(x_0)+g'(x_0)\Rightarrow y'(x)=f'(x)+g'(x)$$

La derivada de una suma de funciones es igual a la suma de las derivadas de cada función. Análogamente se puede demostrar que la derivada de una resta es igual a la resta de las derivadas.

Derivada del producto de dos funciones: $y(x)=f(x)\,.\,g(x)$

$$y'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{[f(x).g(x)]-[f(x_0).g(x_0)]}{x-x_0}=$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x).g(x)-f(x_0).g(x_0)+f(x_0).g(x)-f(x_0).g(x)}{x-x_0}=$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{[f(x)-f(x_0)].g(x)+[g(x)-g(x_0)].f(x_0)}{x-x_0}=$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{[f(x)-f(x_0)].g(x)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{[g(x)-g(x_0)].f(x_0)}{x-x_0}=$$

$$=f'(x_0).g(x_0)+f(x_0).g'(x_0)$$

$$\Rightarrow y'(x)=f'(x).g(x)+f(x).g'(x)$$

Si f y g son funciones derivables entonces la derivada del producto de las dos funciones es igual a la derivada de la primera función por la segunda función sin derivar más la primera función sin derivar por la derivada de la segunda función.

Veremos después otra forma de demostrar esta fórmula aplicando logaritmos.

Ejemplo: $y=x^2.(3x+4)\Rightarrow y'=2x.(3x+4)+x^2.3=9x^2+8x$

Derivada de la función seno

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{sen\,x-sen\,x_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{2\,sen\,\frac{x-x_0}{2}.cos\,\frac{x+x_0}{2}}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{sen\,\frac{x-x_0}{2}.cos\,\frac{x+x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}cos\,\frac{x+x_0}{2}=cos\,x_0\Rightarrow f'(x)=cos\,x$$

Derivada de la función logaritmo natural

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{ln\,x-ln\,x_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{ln\frac{x}{x_0}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{1}{x-x_0}.ln\left(1+\frac{x}{x_0}-1\right)\right]=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\left[ln\left(1+\frac{x-x_0}{x_0}\right)^{\frac{1}{x-x_0}}\right]=\lim_{x\to x_0}\left[ln\left(1+\frac{x-x_0}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{x-x_0}.\frac{1}{x_0}}\right]=$$

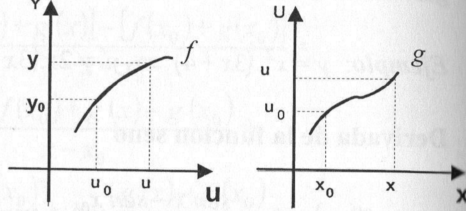
$$=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{1}{x_0}.ln\left(1+\frac{x-x_0}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{x-x_0}}\right]=\frac{1}{x_0}.ln\left[\lim_{x\to x_0}\left(1+\frac{x-x_0}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{x-x_0}}\right]=$$

$$=\frac{1}{x_0}.ln\,e=\frac{1}{x_0}.1\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}$$

Ya hemos visto (ver página 131) que $\lim_{x\to x_0}\left(1+\frac{x-x_0}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{x-x_0}}=e.$

Derivada de la función compuesta

Sea $y = f(u)$ y $u = g(x)$. Es decir que y depende de x a través de u.



Vamos a demostrar que en aquellos puntos en los cuales u es derivable y $f(u)$ también lo es, $y'(x) = y'(u).u'(x)$.

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}.\frac{\Delta u}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}.\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta u \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}.u'(x) = y'(u).u'(x)$$

Vemos que por ser g continua cuando $\Delta x \to 0$, $\Delta u \to 0$ (por eso se puede reemplazar en la demostración). Esta demostración vale si $g(x)$ no es una función constante.

Ejemplo: $y = sen\,(3x)$, $y = sen\,u$ y $u = 3x \Rightarrow y' = cos\,u.3$

por lo tanto $y' = 3.cos\,(3x)$

Método de la derivada logarítmica

Este método permite deducir las funciones derivadas de otras funciones, como ser las del producto, el cociente, la función exponencial, la función potencial, entre otras.

Derivada del producto: $y = u.v \quad u > 0,\ v > 0$

$$y = u.v \qquad \textit{aplicando logaritmos}$$

$$ln\,y = ln\,(u.v) = ln\,u + ln\,v \quad \textit{derivando}$$

$$\frac{1}{y}.y' = \frac{1}{u}.u' + \frac{1}{v}.v'$$

$$y' = y.\left(\frac{1}{u}.u' + \frac{1}{v}.v'\right) \Rightarrow y' = u.v.\left(\frac{1}{u}.u' + \frac{1}{v}.v'\right) = u'.v + u.v'$$

Esta es otra forma de demostrar la fórmula de la derivada de un producto.

Derivada del cociente: $y = \dfrac{u}{v} \quad u > 0,\ v > 0$

$$y = \frac{u}{v} \qquad \textit{aplicando logaritmos}$$

$$ln\,y = ln\left(\frac{u}{v}\right) = ln\,u - ln\,v \quad \textit{derivando}$$

$$\frac{1}{y}.y' = \frac{1}{u}.u' - \frac{1}{v}.v' \Rightarrow y' = y.\left(\frac{1}{u}.u' - \frac{1}{v}.v'\right)$$

$$y' = \frac{u}{v}\left(\frac{1}{u}.u' - \frac{1}{v}.v'\right) = \frac{u'}{v} - \frac{u.v'}{v^2} = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$$

Si u y v son funciones derivables y $v \neq 0$, entonces la derivada del cociente de las dos funciones es igual a la derivada del numerador por el denominador sin derivar, menos el numerador sin derivar por la derivada del denominador, todo dividido por el cuadrado del denominador.

Ejemplos

a) $y = \dfrac{sen\,x}{x^2} \Rightarrow y' = \dfrac{cos\,x.x^2 - sen\,x.2x}{x^4}$

b) $y = \dfrac{x^4+5}{sen^3(2x)} \Rightarrow y' = \dfrac{4x^3.sen^3(2x) - (x^4+5).6\,sen^2(2x).cos\,(2x)}{sen^6(2x)}$

c) $y = \dfrac{x^2.tg\,x}{2+x} \Rightarrow y' = \dfrac{(2x.tg\,x + x^2.sec^2x).(2+x) - x^2.tg\,x.1}{(2+x)^2}$

Derivada de la función potencial: $y = u^n$ ($u > 0$ y $\neq 1$)

$$y = u^n \qquad \textit{aplicando logaritmos}$$

$$ln\,y = n.ln\,u \quad \textit{derivando}$$

$$\frac{1}{y}.y' = n.\frac{1}{u}.u' \Rightarrow y' = y.n.\frac{1}{u}.u' \Rightarrow y' = u^n.n.\frac{1}{u}.u' = n.u^{n-1}.u'$$

Ejemplo: $y = sen^3 x \Rightarrow y' = 3\,sen^2 x.cos\,x$

Derivada de la función exponencial: $y = a^u$ $(a > 0 \text{ y } a \neq 1)$

$$y = a^u \quad \textit{aplicando logaritmos}$$

$$ln\, y = u.ln\, a \quad \textit{derivando}$$

$$\frac{1}{y}.y' = u'.ln\, a \Rightarrow y' = y.u'.ln\ a \Rightarrow y' = a^u.ln\, a.u'$$

Caso particular: si $a = e$, $y = e^x \Rightarrow y' = e^u.u'$

Ejemplos: a) $y = 2^{sen\, x} \Rightarrow y' = 2^{sen\, x}.ln\, 2.cos\, x$

b) $y = 5^{tg\,(3x)+4x} \Rightarrow y' = 5^{\,tg\,(3x)+4x}.(3\, sec^2\,(3x) + 4).\ ln\, 5$

c) $y = e^{5\, sen\, x} \Rightarrow y' = e^{5\, sen\, x}.5\, cos\, x$

Derivada de la función potencial exponencial: $y = u^v$ $(u > 0 \text{ y} \neq 1)$

$$y = u^v \quad \textit{aplicando logaritmos}$$

$$ln\, y = v.ln\, u \quad \textit{derivando}$$

$$\frac{1}{y}.y' = v'.ln\, u + v.\frac{u'}{u} \Rightarrow y' = y.\left(v'.ln\, u + v.\frac{u'}{u}\right) \therefore y' = u^v.\left(v'.ln\, u + v.\frac{u'}{u}\right)$$

Derivadas de las funciones hiperbólicas

$$y = Ch\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow y' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = Sh\, x$$

$$y = Sh\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow y' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = Ch\, x$$

$$y = Th\, x = \frac{Sh\, x}{Ch\, x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \Rightarrow y' = \frac{\left(e^x + e^{-x}\right)^2 - \left(e^x - e^{-x}\right)^2}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2} =$$

$$\frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2} =$$

$$= \frac{4}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2} = \frac{1}{(Ch\, x)^2} = Sech^2\, x$$

Derivada de la función inversa

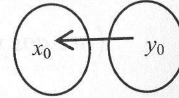
Si $y = f(x)$ es biyectiva, entonces existe la función $f^{-1}(x)$ tal que $f^{-1}(x)$ es la función inversa de f y recíprocamente.

Para calcular la derivada de la función inversa partimos de: $(f^{-1} o f)(x) = f^{-1}[f(x)] = x$. Derivamos respecto de x miembro a miembro como función compuesta.

$$\left(f^{-1}\right)'\left[f(x)\right].f'(x) = 1$$

en $x = x_0$: $\left(f^{-1}\right)'\left[f(x_0)\right] = \left(f^{-1}\right)'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$ con $f'(x_0) \neq 0$

Esto permite calcular la derivada de la función inversa de una función dada sin necesidad de calcular la función inversa.



Ejemplos

a) Calcular $\left(f^{-1}\right)'(3)$ si $f(x) = x^5 + x^3 + 1$.

$y_0 = 3$, debemos calcular x_0. $3 = x^5 + x^3 + 1 \Rightarrow x_0 = 1$, por lo tanto

$$\Rightarrow \left(f^{-1}\right)'(3) = \frac{1}{5x^4 + 3x^2}\Bigg]_{x_0=1} = \frac{1}{8}$$

b) Calcular $\left(f^{-1}\right)'(2)$ si $f(x) = x^3 + 1$.

$y_0 = 2$, debemos calcular x_0.

$2 = x^3 + 1 \Rightarrow x_0 = 1$ por lo tanto $\Rightarrow \left(f^{-1}\right)'(2) = \dfrac{1}{3x^2}\Bigg]_{x_0=1} = \dfrac{1}{3}$.

Derivadas de las funciones circulares inversas

Para calcular las derivadas de estas funciones vamos a utilizar la fórmula de la derivada de la función inversa: $\left(f^{-1}\right)'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$.

Además recordar que: $sen^2\, x + cos^2\, x = 1$ y que $sec^2\, x = tg^2\, x + 1$.

Derivada del arco seno: $y = sen\,x \Rightarrow y^{-1}(x) = arc\,sen\,x$

$$(arc\,sen\,y)' = \frac{1}{(sen\,x)'} = \frac{1}{cos\,x} = \frac{1}{\sqrt{1-sen^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Por lo tanto $(arc\,sen\,x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Ejemplo: $y = arc\,sen\,(5x^2) \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-(5x^2)^2}}.10\,x = \dfrac{10\,x}{\sqrt{1-25x^4}}$

Derivada del arco coseno: $y = cos\,x \Rightarrow y^{-1}(x) = arc\,cos\,x$

$$(arc\,cos\,y)' = \frac{1}{(cos\,x)'} = \frac{-1}{sen\,x} = \frac{-1}{\sqrt{1-cos^2 x}} = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Por lo tanto $(arc\,cos\,x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

Ejemplo

$y = x.arc\,cos\,(3x^2)$

$$y' = 1.\,arc\,cos\,(3x^2) + x.\left(-\frac{1}{\sqrt{1-(3x^2)^2}}.\,6x\right) = arc\,cos\,(3x^2) - \frac{6x^2}{\sqrt{1-9x^4}}$$

Derivada del arco tangente: $y = tg\,x \Rightarrow y^{-1}(x) = arc\,tg\,x$

$$(arc\,tg\,y)' = \frac{1}{(tg\,x)'} = \frac{1}{sec^2 x} = \frac{1}{1+tg^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$$

Por lo tanto $(arc\,tg\,x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

Ejemplo: $y = arc\,tg\,2^x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{1+(2^x)^2}.\,2^x.\,ln\,2 = \dfrac{2^x.\,ln\,2}{1+2^{2x}}$

Derivadas de las funciones hiperbólicas inversas

Para deducir estas derivadas procedemos de la misma forma que procedimos para obtener las derivadas de las inversas trigonométricas, pero teniendo en cuenta que $Ch^2 x - Sh^2 x = 1$ y que $Sech^2 y + Th^2 y = 1$.

Derivada del argumento del seno hiperbólico

$y = Sh\,x \Rightarrow y^{-1}(x) = Arg\,Sh\,x$

$$(Arg\,Sh\,y)' = \frac{1}{Ch\,x} = \frac{1}{\sqrt{1+Sh^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

Derivada del argumento del coseno hiperbólico

$y = Ch\,x \Rightarrow y^{-1}(x) = Arg\,Ch\,x$

$$(Arg\,Ch\,y)' = \frac{1}{Sh\,x} = \frac{1}{\sqrt{Ch^2 x - 1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}$$

Derivada del argumento de la tangente hiperbólica

$y = Th\,x \Rightarrow y^{-1}(x) = Arg\,Th\,x$

$$(Arg\,Th\,y)' = \frac{1}{Sech^2 x} = \frac{1}{1-Th^2 x} = \frac{1}{1-y^2}$$

De estas demostraciones surge que:

$$(Arg\,Sh\,x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (Arg\,Ch\,x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (Arg\,Th\,x)' = \frac{1}{1-x^2}$$

Y de esta forma, aplicando la definición de derivada o el método de la derivada logarítmica o como funciones inversas se pueden calcular las funciones derivadas de distintas funciones, cálculo que será más sencillo en algunos casos que en otros. Estas funciones derivadas dan origen a la ***tabla de derivadas*** que está al final de esta unidad.

ANÁLISIS DE LA PARIDAD DE LA FUNCIÓN DERIVADA

a) *Si una función es par y derivable entonces su derivada es impar.*

Dem.: f es par $\Leftrightarrow f(-x)=f(x)$, derivando se obtiene que

$$f'(-x)(-1)=f'(x)\Rightarrow f'(-x)=-f'(x)$$ por lo tanto f' es impar.

b) *Si una función es impar y derivable entonces su derivada es par.*

Dem.: f es impar $\Leftrightarrow f(-x)=-f(x)$, derivando se obtiene que

$$f'(-x)(-1)=-f'(x)\Rightarrow f'(-x)=f'(x)$$ por lo tanto f' es par.

DERIVADAS LATERALES

Las derivadas laterales surgen de calcular los límites laterales del cociente incremental. Esto es necesario, por ejemplo, cuando la función a izquierda y a derecha de x_0 no es la misma.

Derivada lateral a derecha: $f'(x_0)^+=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Derivada lateral a izquierda: $f'(x_0)^-=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

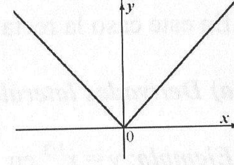
La derivada en el punto existe $\Leftrightarrow f'(x_0)^-=f'(x_0)^+$, ambas finitas.

Clasificación de los puntos a partir de las derivadas laterales

Si $f'(x_0)^-=f'(x_0)^+$ finitas entonces existe $f'(x_0)$, el punto se denomina ***ordinario*** y en dicho punto hay recta tangente no vertical.

Si $f'(x_0)^-\neq f'(x_0)^+$ finitas entonces no existe $f'(x_0)$ el punto se denomina ***anguloso*** y en dicho punto hay dos semirrectas tangentes de distinta pendiente.

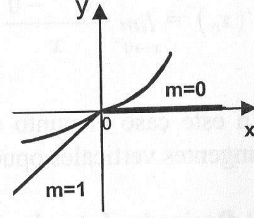
Ejemplos: a) $y=|x|$ $\quad |x|=\begin{cases}-x & x<0\\ x & x\geq 0\end{cases}$ en $x_0=0$



$$f'(x_0)^+=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-0}{x}=1$$

$$f'(x_0)^-=\lim_{x\to 0^-}\frac{x-0}{x}=-1\Rightarrow x_0=0$$ es un punto anguloso, hay dos semirrectas tangentes de distinta pendiente.

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1-e^{1/x}} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$,



$$f'(x_0)^+=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{x}{1-e^{1/x}}-0}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1-e^{1/x}}=\frac{1}{\to-\infty}=0$$

$$f'(x_0)^-=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{x}{1-e^{1/x}}-0}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{1-e^{1/x}}=\frac{1}{1}=1$$

En $x=0$ las derivadas laterales son finitas y distintas entonces el punto es anguloso, hay 2 semirrectas tangentes de distinta pendiente, m = 0 y m = 1.

Derivada infinita - derivadas laterales infinitas

Vamos a analizar el caso en el que la derivada es infinita:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\infty$$

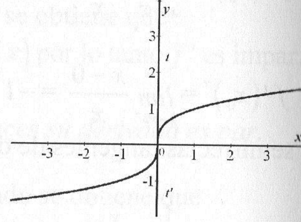
En este caso la recta tangente es ***vertical***. Veamos los distintos casos.

a) Derivadas laterales infinitas del mismo signo

Ejemplo: $y = x^{1/3}$ en $x_0 = 0$

$$f'(x_0)^+ = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^{1/3} - 0}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$$

$$f'(x_0)^- = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^{1/3} - 0}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$$



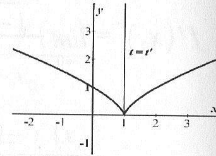
En este caso el punto se denomina ***de inflexión***, hay dos semirrectas tangentes verticales opuestas y por lo tanto la recta tangente es ***vertical***.

b) Derivadas laterales infinitas de distinto signo

Ejemplo: $y = (x-1)^{2/3}$, en $x_0 = 1$

$$f'(x_0)^+ = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1)^{2/3} - 0}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} = +\infty$$

$$f'(x_0)^- = \lim_{x \to 1^-} \frac{(x-1)^{2/3} - 0}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} = -\infty$$



En este caso el punto se denomina ***cuspidal o de retroceso***, (hay dos semirrectas tangentes verticales coincidentes). En este caso se dice que no hay derivada única ni recta tangente única en el punto.

DERIVADAS SUCESIVAS

Dada una función podemos calcular, como hemos visto, su función derivada que denominamos ***derivada primera y'***, si esta función se vuelve a derivar se obtiene lo que se denomina ***derivada segunda y''*** y así sucesivamente. Se verifican distintas situaciones.

Ejemplos

a) $y = 2x^3 - 4x + 3$
$y' = 6x^2 - 4$
$y'' = 12x$
$y''' = 12$, a partir de esta derivada, las sucesivas derivadas valen 0.

b) $y = e^x$
$y' = e^x$
$y'' = e^x, \dots, y^n = e^x$

c) $y = sen\, x$

$$y' = cos\, x = sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y'' = -sen\, x = sen\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y''' = -cos\, x = sen\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right), \dots, y^n = sen\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

d) $y = cos\, x$

$$y' = -sen\, x = cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y'' = -cos\, x = cos\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y''' = sen\, x = cos\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right), \dots, y^n = cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

e) $y = ln\, x$
$y' = x^{-1}$
$y'' = -x^{-2}$
$y''' = 2x^{-3}$
$y^{iv} = -2.3.x^{-4}, \dots, y^n = (-1)^{n-1}.(n-1)!.x^{-n}$

Por definición

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}, \dots f^n(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{n-1}(x) - f^{n-1}(x_0)}{x - x_0}$$

Propiedad: Si existe $f^n(x)$ entonces $f^{n-1}(x)$ es continua.

RECTA TANGENTE Y RECTA NORMAL A UNA CURVA EN UN PUNTO

Ecuación de la recta tangente

Dada una curva surge la necesidad de calcular la ecuación de la recta tangente a la misma en el punto de coordenadas $(x_0;y_0)$, donde y_0 es el valor que toma la función para $x = x_0$.

Para obtener dicha ecuación recordemos la ecuación de la recta que pasa por un punto:

$y - y_0 = m.(x - x_0)$, donde m es la pendiente de la recta.

Pero al ver la interpretación geométrica de la derivada vimos que la derivada mide la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto, por lo tanto podemos sustituir m por $f'(x_0)$. Por lo tanto la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $x = x_0$ es:

$$y_t - y_0 = f'(x_0).(x - x_0)$$

Nota: denominamos y_t a la y de la recta tangente para distinguirla de la y de la función original.

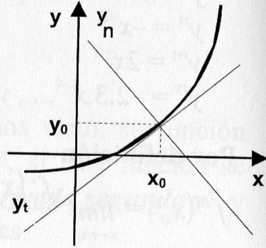
Caso particular

Si $f'(x_0) = 0$, la recta tangente es horizontal: $y_t = y_0$.

Si $f'(x_0) = \infty$, la recta tangente es vertical, su ecuación es: $x = x_0$.

Ecuación de la recta normal

Se llama recta normal (la denominamos como y_n) a la recta perpendicular a la recta tangente. Para calcular dicha recta sólo debemos sustituir en la ecuación de la recta tangente la pendiente por su inversa cambiada de signo, debido a la relación que existe entre las pendientes de rectas perpendiculares.



$$y_n - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}.(x - x_0) \text{ con } f'(x_0) \neq 0$$

Caso particular

Si $f'(x_0) = 0$, la recta normal es vertical: $x = x_0$.

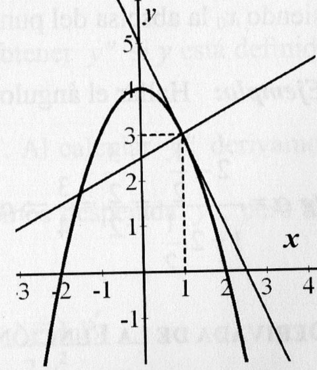
Si $f'(x_0) = \infty$, la recta normal es horizontal, su ecuación es: $y_n = y_0$.

Ejemplo: dada $y = -x^2+4$, calcular las ecuaciones de las rectas tangente y normal en $x_0 = 1$.

$x_0 = 1,\ y_0 = 3,\ f'(x) = -2x,\ f'(1) = -2$

$y_t - 3 = -2(x-1) \Rightarrow y_t = -2x + 5$

$y_n - 3 = \frac{1}{2}.(x-1) \Rightarrow y_n = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$



ANGULO ENTRE DOS CURVAS

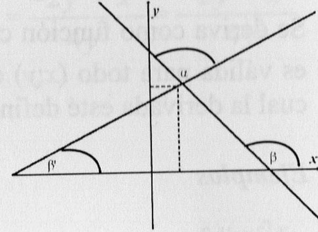
Primero analizamos el caso particular en el cual las curvas sean dos rectas.

Angulo entre dos rectas

Para calcular el ángulo entre dos rectas $y_1 = m_1x + b_1$ e $y_2 = m_2x + b_2$ vemos tener en cuenta la fórmula de la tangente de la resta de dos ángulos:

$$tg\,(\alpha - \beta) = \frac{tg\,\alpha - tg\,\beta}{1 + tg\,\alpha.\,tg\,\beta}$$

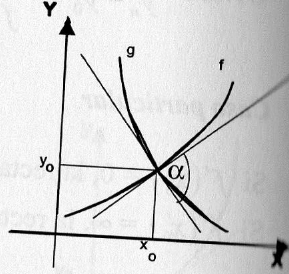
$$tg\,\alpha = tg\,(\beta - \beta') = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2\,.\,m_1}$$



β=α+β' (por prop. del ángulo exterior)

Angulo entre dos curvas

El ángulo entre dos curvas es el que forman sus rectas tangentes.



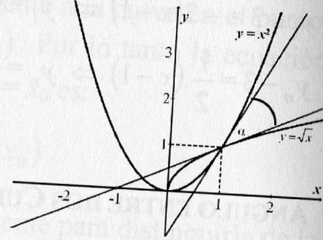
Si $y_1(x) = f(x)$, $y_2(x) = g(x)$

$$tg\ \alpha = \frac{f'(x_0) - g'(x_0)}{1 + f'(x_0).g'(x_0)}$$

siendo x_0 la abscisa del punto de intersección de ambas curvas.

Ejemplo: Hallar el ángulo entre $y_1 = x^2$ e $y_2 = \sqrt{x}$ en $x_0 = 1$.

$$tg\ \alpha = \frac{2 - \frac{1}{2}}{1 + 2.\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4} \Rightarrow \alpha = 36°\ 52'11''$$



Derivada de la Función Implícita

Consideremos la ecuación $F(x;y) = 0$. Si en un entorno del punto $P_0 = (x_0;y_0)$ que satisface la ecuación y en el cual la misma es derivable, se puede expresar a la variable **y** como función de x, $y = f(x)$, se dice que la ecuación $F(x;y) = 0$ define en el entorno de $P_0 = (x_0;y_0)$ a la variable **y** como *función implícita* de **x**.

Se deriva como función compuesta, luego se despeja y'. La expresión es válida para todo $(x;y)$ que satisface la ecuación $F(x;y) = 0$ y en el cual la derivada esté definida.

Ejemplos

a) $x^2 + y^2 - 1 = 0$, derivando respecto de x teniendo en cuenta que y es función de x queda: $2x + 2y.y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}$.

b) dada $x^4 - xy + y^4 = 1$, hallar $y'(0;1)$

Primero verificamos que $(0;1)$ satisface la ecuación, luego calculamos la derivada: $0 - 0 + 1 = 1$.

$$4x^3 - (y + x.y') + 4y^3.y' = 0 \Rightarrow y'.(4y^3 - x) = y - 4x^3$$

$$y' = \frac{y - 4x^3}{4y^3 - x} \Rightarrow y'(0;1) = 0{,}25$$

Derivadas sucesivas en forma implícita

Veamos el siguiente ejemplo. Queremos obtener y'' si y está definida en forma implícita.

$x^2 + 2y^2 = 0 \Rightarrow 2x + 4y.y' = 0.\ y' = -\frac{x}{2y}$. Al calcular y'' derivamos ahora como función explícita ya que tenemos despejada y', pero teniendo en cuenta que y es función de x.

$$y'' = \frac{-2y + x.2y'}{4y^2} = \frac{-y + x\,y'}{2y^2}$$

Vemos que en y'' aparece y', por lo tanto debemos reemplazar y' por su expresión.

$$y'' = \frac{-y + x.y'}{2y^2} = \frac{-y + x.\left(-\frac{x}{2y}\right)}{2y^2} = \frac{-y - \frac{x^2}{2y}}{2y^2} = \frac{-2y^2 - x^2}{4y^3} = -\frac{2y^2 + x^2}{4y^3}$$

Otro ejemplo

Hallar $f'(x)$ y $f''(x)$ si $x^2 - xy + y^2 = 4$

$$2x - (y + x.y') + 2y.y' = 0 \Rightarrow 2x - y - x.y' + 2y.y' = 0 \Rightarrow y' = \frac{y - 2x}{2y - x}$$

Calculamos y'' a partir de y':

$$y''=\frac{(y'-2).(2y-x)-(y-2x).(2y'-1)}{(2y-x)^2}=\frac{\left(\frac{y-2x}{2y-x}-2\right).(2y-x)-(y-2x).\left(2.\frac{y-2x}{2y-x}-1\right)}{(2y-x)^2}=$$

$$=\frac{(-3y).(2y-x)-(y-2x).(-3x)}{(2y-x)^3}=\frac{-6y^2+6xy-6x^2}{(2y-x)^3}=\frac{-6.(x^2-xy+y^2)}{(2y-x)^3}=-\frac{24}{(2y-x)^3}$$

TABLA DE DERIVADAS

y	y'
k	0
x	1
$k\,x$	k
$k.f(x)$	$k.f'(x)$
$u^n \quad (u>0 \text{ y } \neq 1)$	$n.u^{n-1}.u'$
$sen\ u$	$cos\ u.u'$
$cos\ u$	$-sen\ u.u'$
$tg\ u$	$sec^2u.u'$
$cotg\ u$	$-cosec^2u.u'$
$sec\ u$	$sec\ u.tg\ u.u'$
$cosec\ u$	$-cosec\ u.cotg\ u.u'$
e^u	$e^u.u'$
$\sqrt{u}$	$\frac{1}{2\sqrt{u}}.u'$
$ln\ u$	$\frac{1}{u}.u'$
$log_a\ u$	$\frac{1}{u}.log_a e.u'$
$arc\ tg\ u$	$\frac{1}{1+u^2}.u'$
$arc\ sen\ u$	$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}.u'$
$arc\ cos\ u$	$-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}.u'$
$Arg\ Sh\ u$	$\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}.u'$
$Arg\ Ch\ u$	$\frac{1}{\sqrt{u^2-1}}.u'$
$Arg\ Th\ u$	$\frac{1}{1-u^2}.u'$
$u+v$	$u'+v'$
$u-v$	$u'-v'$
$u.v$	$u'.v+u.v'$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'.v-u.v'}{v^2}$
$a^u \quad (a>0 \text{ y } \neq 1)$	$a^u.ln\ a.u'$
$u^v \quad (u>0 \text{ y } \neq 1)$	$u^v.\left(v'.ln\ u+v.\frac{u'}{u}\right)$

TASA O RAZÓN DE CAMBIO DE UNA FUNCIÓN

Sean x e y las letras que designan a las magnitudes de dos variables relacionadas entre sí variando y en función de x, es decir que $y=f(x)$.

Se llama ***relación de cambio*** de y con respecto a x al cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Relación de cambio constante: si el cociente es constante.

Relación de cambio media: si el cociente no es constante.

Relación de cambio instantánea o ***tasa de cambio***: al $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Por la definición dada oportunamente de derivada vemos que la tasa o razón de cambio de una variable con respecto a otra coincide con la derivada de la función.

Las expresiones ***tasa de cambio de una función*** y ***derivada de una función*** son equivalentes e indican la ***rapidez*** con que varía una variable respecto de la otra.

EJERCICIOS GENERALES RESUELTOS

1) Calcular las funciones derivadas de las siguientes funciones

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}$ b) $f(x) = arc\ tg\sqrt{\dfrac{1-cos\ x}{1+cos\ x}}$

c) $f(x) = arc\ sen\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

a) Derivamos como cociente:

$$f'(x)=\frac{-1.\left(1-\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\right)}{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^2}=\frac{-\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}.\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}.\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)}$$

b) Comenzamos derivando el arco tangente y luego la raíz cuadrada

$$f'(x)=\frac{1}{1+\dfrac{1-cos\ x}{1+cos\ x}}.\frac{1}{2.\sqrt{\dfrac{1-cos\ x}{1+cos\ x}}}.\frac{sen\ x.(1+cos\ x)-(1-cos\ x).(-sen\ x)}{(1+cos\ x)^2}=$$

$$=\frac{1+cos\ x}{2}.\frac{1}{2.\sqrt{\dfrac{1-cos\ x}{1+cos\ x}}}.\frac{2\ sen\ x}{(1+cos\ x)^2}=\frac{1}{2}.\frac{sen\ x}{\sqrt{(1-cos\ x).(1+cos\ x)}}=$$

$$\frac{1}{2}.\frac{sen\ x}{\sqrt{sen^2x}}=\frac{1}{2}$$

c) Comenzamos derivando el arco seno y luego el cociente

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)^2}}.\frac{\left(e^x+e^{-x}\right)^2-\left(e^x-e^{-x}\right)^2}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{e^{2x}+2+e^{-2x}-e^{2x}+2-e^{-2x}}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2}}}.\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}-e^{2x}+2-e^{-2x}}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2}=$$

$$=\frac{e^x+e^{-x}}{2}.\frac{4}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2}=\frac{2}{e^x+e^{-x}}$$

2) Si $f: \Re\to\Re$ es continua en $x=-1$, demostrar que $g(x)=f(x).\ sen\ (x+1)$ es derivable en $x=-1$.

$g(x) = f(x).\ sen\ (x+1)$ es continua por ser producto entre dos funciones continuas, f y $sen\ (x+1)$.

$$g'(-1)=\lim_{x\to-1}\frac{f(x).sen(x+1)-g(-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{f(x).sen(x+1)-0}{x+1}=f(-1)$$

que existe por la hipótesis de continuidad, por lo tanto existe $g'(-1)$.

3) La ecuación de la recta tangente al gráfico de f en (1;3) es $y = 6x-3$. Determinar f si $f''(x) = 36x-16$.

La función original debe ser un polinomio de grado 3: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Debemos calcular a, b, c, y d. Las derivadas son: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$, $y'' = 6ax + 2b$.

Por pertenecer el punto (1;3) a $f \Rightarrow 3 = a + b + c + d$

Por ser $y'' = 36x-16$ $\Rightarrow 6ax + 2b = 36x - 16$

Por ser la recta tangente $y = 6x-3$ $\Rightarrow 6 = 3a + 2b + c$

De resolver estas ecuaciones surge que $f(x) = 6x^3 - 8x^2 + 6x - 1$

4) Analizar la derivabilidad de $f: \Re\to\Re\ /\ f(x) = \begin{cases} |2x-6|+1 & x \geq 0 \\ x & x < 0 \end{cases}$

Debemos tener en cuenta que si

$x \geq 3: |2x-6| + 1 = 2x - 6 + 1 = 2x - 5$

$x < 3: |2x-6| + 1 = -2x + 6 + 1 = -2x + 7$

La función queda: $f(x)=\begin{cases} x & x<0 \\ -2x+7 & 0\le x<3 \\ 2x-5 & x\ge 3\end{cases}$, y la derivada es:

$$f'(x)=\begin{cases} 1 & x<0 \\ -2 & 0<x<3 \\ 2 & x>3\end{cases}$$

En $x=0$ y $x=3$ la función no es derivable porque no es continua.

5) Dada $f(x)=\begin{cases} |x-2|-1 & x\le 2 \\ -1 & x>2\end{cases}$, continua en $\mathbb{R}$, analizar su derivabilidad.

Desarrollando f queda: $f(x)=\begin{cases} -x+1 & x\le 2 \\ -1 & x>2\end{cases}$

Calculamos, si existe, $f'(2)$. Analizamos las derivadas laterales.

$$f'(2)^- = \lim_{x\to 2^-}\frac{-x+1+1}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-x+2}{x-2}=-1$$

$$f'(2)^+ = \lim_{x\to 2^+}\frac{-1+1}{x-2}=0$$

Como las derivadas laterales son distintas la derivada en el punto $x=2$ no existe. Es un punto anguloso.

6) Si f es derivable hasta tercer orden inclusive en $\Re^+$, demostrar que si $y=f(\ln x)$ entonces $x^3.y'''=f'''(\ln x)-3f''(\ln x)+2f'(\ln x)$.

En este ejercicio tenemos que calcular derivadas sucesivas de una función compuesta: $y=f(\ln x)$.

$$y'=\frac{f'(\ln x)}{x},\; y''=\frac{f''(\ln x).\frac{1}{x}.x-f'(\ln x)}{x^2}=\frac{f''(\ln x)-f'(\ln x)}{x^2},$$

$$y'''=\frac{\left[f'''(\ln x).\frac{1}{x}-f''(\ln x).\frac{1}{x}\right].x^2-\left[f''(\ln x)-f'(\ln x)\right].2x}{x^4}=$$

$$=\frac{f'''(\ln x)-3f''(\ln x)+2f'(\ln x)}{x^3}$$

Multiplicando esta expresión por x^3 queda que:

$x^3.y'''=f'''(\ln x)-3f''(\ln x)+2f'(\ln x)$.

7) Demostrar que $y=\ln\left(\frac{1}{1+x}\right)$ satisface la ecuación $x.y'+1=e^y$

Para eso debemos calcular y'

$$y'=(1+x).\left(-\frac{1}{(1+x)^2}\right)=-\frac{1}{1+x}\Rightarrow x.\left(-\frac{1}{(1+x)}\right)+1=\frac{-x}{1+x}+1=\frac{1}{1+x}=e^y$$

8) Calcular a, b, c y d tal que la curva representativa de $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ pase por el punto $P_0=(-1;2)$, sea tangente al eje x en $x_0=1$ y su recta tangente en $x_1=-2$ sea horizontal.

Los puntos $(-1;2)$ y $(1;0)$ pertenecen a la curva por lo tanto verifican su ecuación: $\begin{cases} -a+b-c+d=2 \\ a+b+c+d=0\end{cases}$ (1)

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$. Como en $x_0=1$ y en $x_1=-2$ las rectas tangentes tienen pendiente nula, resulta que: $\begin{cases} 3a+2b+c=0 \\ 12a-4b+c=0\end{cases}$ (2)

De (1) y (2) surge el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} -a+b-c+d=2 \\ a+b+c+d=0 \\ 3a+2b+c=0 \\ 12a-4b+c=0 \end{cases}$$, cuya solución es: $a=\frac{1}{5}$; $b=\frac{3}{10}$; $c=-\frac{6}{5}$; $d=\frac{7}{10}$

9) Determinar la ecuación de cada recta normal al gráfico de la curva $xy-3x-4=0$ en el punto donde la abscisa y la ordenada coinciden. Hallar el punto de intersección de las mismas.

Primero determinamos esos puntos: si $x=y \Rightarrow x^2-3x-4=0$
$x_0=-1$, $x_1=4$. $P_0=(-1;-1)$, $P_1=(4;4)$.

Calculamos las pendientes de las rectas: $y+x\,y'-3=0$ ∴

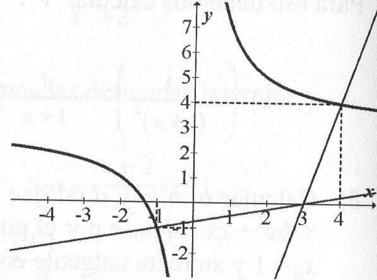
$y'=\frac{3-y}{x}=\frac{3-x}{x}$, por lo tanto $y'(-1)=-4$, $y'(4)=-1/4$.

Las pendientes, por corresponder a las rectas normales, son:
$y_n'(-1)=1/4$ e $y_n'(4)=4$.

Las ecuaciones de las rectas normales son: $y_n=\frac{1}{4}x-\frac{3}{4}$ e $y_n=4x-12$

$\frac{1}{4}x-\frac{3}{4}=4x-12 \Rightarrow x_0=3$

Las rectas se cortan en $P_0=(3;0)$.



10) Hallar la ecuación de la recta tangente al gráfico de la curva definida por $\begin{cases} x^3+1 & x\le 1 \\ -x^2+5x-2 & x>1 \end{cases}$ en $x_0=1$

Calculamos y_0 y las derivadas laterales en $x_0=1$. $y_0=2$

$f'(1)^-=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^3+1-2}{x-1}=3$ $\quad f'(1)^+=\lim_{x\to 1^+}\frac{-x^2+5x-2-2}{x-1}=3$

$y_t-2=3(x-1) \Rightarrow y_t=3x-1$

EJERCICIOS PROPUESTOS

A) Hallar las derivadas en los puntos indicados aplicando la definición.

1) $y=x^3-2x+3$ en $x_0=1$ 2) $y=2x^4-x$ en $x_0=-2$
3) $y=\sqrt{x}$ en $x_0=4$ 4) $y=\frac{1}{x}$ en $x_0=-1$

B) Hallar las funciones derivadas aplicando la definición de derivada.

1) $y=x^3+x$ 2) $y=2x^2+3x-4$ 3) $y=\frac{1}{x}$
4) $y=\sqrt{x}$ 5) $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$

C) Hallar las funciones derivadas aplicando las reglas de derivación.

1) $y=x^5-3x^3+8$ 2) $y=\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x}$ 3) $y=\frac{x^4}{a}+\frac{x^2}{b}+x$
4) $y=ax^3-\frac{x}{b}+c$ 5) $y=(1+4x^3)(1+2x^2)$ 6) $y=x.\ln x$
7) $f(t)=(2t-1).(t^2-6t+3)$ 8) $y=x.(3x+2).(2x+3)$ 9) $y=\frac{2x^4}{4-x^2}$
10) $y=\frac{5-x}{5+x}$ 11) $y=\frac{x^3}{1+x^2}$ 12) $f(t)=\frac{t^3+1}{t^2-t-2}$
13) $y=sen\ x.\cos\ x$ 14) $y=\frac{sen\,x}{1+cos\,x}$ 15) $y=\frac{e^x}{tg\ x}$
16) $y=x.arc\ sen\ x$ 17) $y=(x^2+4)^5$ 18) $y=\sqrt{x^2+9}$
19) $y=(3+x).\sqrt{3-x}$ 20) $y=\sqrt{x^3-x}$ 21) $y=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$
22) $y=\sqrt{1-\sqrt{1-x}}$ 23) $y=\sqrt[3]{x^2+x+1}$ 24) $y=ln\frac{1+x}{1-x}$

25) $y=e^{4x+1}$ 26) $y=7^{x^2+3x+2}$ 27) $y=e^{\sqrt{x}}$

28) $y=e^{x^2}.\ln x^2$ 29) $y=sen^2 x$ 30) $y=sen\,(x+a).\cos\,(x+a)$

31) $y=sen\ \ln x$ 32) $y=\ln tg\ x$ 33) $y=\ln tg\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2}\right)$

34) $y=sen^3(2x)+tg\ \ln x$ 35) $y=\cos^2\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$ 36) $f(t)=(t.\ cotg\ t)^2$

37) $y=x^x$ 38) $y=\sqrt{arc\ sen\ x+1}$ 39) $y=\dfrac{1}{2}tg^2 x+\ln\ \cos x$

40) $y=x^{sen\ x}+x$ 41) $y=\dfrac{x^{2x}-x^3}{x^2}$ 42) $y=arc\ sen\ x+arc\ sen\ \sqrt{1-x^2}$

43) $y=arc\ cos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ 44) $y=arc\ tg\dfrac{x+2}{1-2x}$ 45) $y=arc\ sen\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

46) $y=\sqrt{x+1}-\ln\left(1+\sqrt{x+1}\right)$ 47) $y=\ln\left(\sec x+tg\ x\right)$

48) $y=\ln\,[\ln\,(\ln x)]$

D) Dada $y=\dfrac{x^3}{3}-x^2+2$, calcular:

1) pendiente de la recta tangente si $x_0=1$.
2) puntos donde $\alpha=45°$.
3) puntos donde la recta tangente es paralela a la recta $6x-2y=6$.
4) punto donde la recta tangente es perpendicular a la recta $x-y=3$.

E) Indicar puntos donde la recta tangente es horizontal si:

1) $f(x)=x^3-6x^2+2$ 2) $f(x)=\dfrac{x}{9-x}$

3) $f(x)=e^{x^2+1}$ 4) $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-2x^2+3x+5$

F) Hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a:

1) $y=x^2+1$ en $x_0=1$. Graficar. 2) $y=\sqrt{x}$ en $x_0=1$. Graficar.

3) $y=-x^2+4x-3$ en $x_0=0$. Graficar. 4) $y=3x^2+\dfrac{1}{x}$ en $x_0=-1$

5) $y=\dfrac{1}{2-x}$ en $x_0=1$ 6) $f(x)=\begin{cases} x^2-3x & x<1 \\ x^3-4x+1 & x\geq 1\end{cases}$ en $x_0=1$

G) ¿En qué puntos la curva $f(x)=x^3+4x+1$ tiene una recta normal cuya pendiente es $-1/7$?

H) ¿En qué puntos la recta tangente a la curva $f(x)=x^3-3$ es:

1) paralela a la recta $12x-y=5$?
2) perpendicular a la recta $x+3y-1=0$?

I) Indicar en qué puntos las siguientes funciones admiten tangente vertical. Clasificarlos.

1) $f(x)=\sqrt{25-x^2}$ 2) $f(x)=4-\sqrt{2+x}$ 3) $f(x)=(x-1)^{1/5}$

4) $f(x)=x^{2/3}+1$ 5) $f(x)=2-\sqrt[5]{x-3}$ 6) $f(x)=1+\sqrt[3]{x-2}$

J) Calcular las siguientes derivadas sucesivas

1) $f(x)=2x.sen\ x$ hallar y'''
2) $f(x)=\ln x$ hallar y'''
3) $f(x)=sen\ (2x)$ hallar y^v
4) Dada $f(x)=x^2.e^x$ demostrar que $y''=(x^2+4x+2).e^x$
5) $f(x)=x.\ arc\ tg\ x$ hallar y'''
6) $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)$ hallar y''
7) $f(x)=x.e^x$ hallar y^n
8) $f(x)=\ln\,(1+x)$ hallar y^n
9) Demostrar que la función $y=e^{2x}.sen\ (5x)$ satisface la ecuación $y''-4y'+29y=0$
10) Demostrar que la función $y=\dfrac{1}{2}x^2.e^x$ satisface la ecuación $y''-2y'+y=e^x$

K) Calcular las siguientes derivadas laterales aplicando la definición.

1) $f(x) = |x-3|$ en $x_0 = 3$ 2) $f(x) = ent\,(x)$ en $x_0 = 1$

3) $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x<2 \\ x+1 & x \geq 2 \end{cases}$ en $x_0 = 2$ 4) $f(x) = \begin{cases} x^3+1 & x \leq 1 \\ -x^2+3 & x>1 \end{cases}$ en $x_0 = 1$

5) $f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ 2x-1 & 1 < x < 2 \end{cases}$ en $x_0 = ½$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$

L) Calcular $f'(x)$ y $\left(f^{-1}\right)'(x)$ cuando existan.

1) $f(x) = 2x+1$ 2) $f(x) = x^3$ 3) $f(x) = e^{x^2}$ 4) $f(x) = sen\,(2x)$

M) Calcular $\left(f^{-1}\right)'(2)$ si $f(x) = \sqrt{x} + ln\,x + 1$

N) 1) Calcular las derivadas 1º y 2º de las siguientes funciones implícitas

a) $x^3 + y^3 = 1$ b) $y^2 - 3xy = 9$ c) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ d) $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$

e) $x^2 + y^2 = 1$

2) Hallar y'' en el punto (1;1) si $x^2 + 5xy + y^2 - 2x + y - 6 = 0$

3) Hallar y'' en el punto (0;1) si $x^4 - xy + y^4 = 1$

4) Hallar y'' si $y = x + arc\,tg\,y$

O) Dada $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x<3 \\ 8-x & x \geq 3 \end{cases}$ probar que es continua, hallar las derivadas laterales en $x_1 = 3$ y clasificar el punto.

P) Hallar $f'[f(x)]$ si: a) $f(x) = sen\,x$ b) $f(x) = x^3$ c) $f(x) = x^2+5$

Q) Hallar $f[f'(x)]$ si: a) $f(x) = 2x^2$ b) $f(x) = sen\,(2x)$ c) $f(x) = 5$

R) Indicar en cada caso si las siguientes proposiciones son V o F

a) La curva correspondiente a $h(x) = 2^x.|8-x|$ no presenta puntos angulosos.

b) Si $f: \Re^+ \to \Re \,/\, f(x) = x^x - x$ y $g: \Re^+ \to \Re \,/\, g(x) = ln\,x - x + 1$, entonces: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f''(x)}{g''(x)} = 2$.

c) La función $f(x) = \begin{cases} -|x-3| & x<3 \\ |x-3|+1 & x \geq 3 \end{cases}$ es derivable en $x_1 = 3$.

d) Si $y = f(x)$ está definida en forma implícita por la ecuación $x^y - y^x = 0$, entonces $y' = \dfrac{y^2 - x.y.ln\,y}{x^2 - x.y.ln\,x}$.

e) Si $f(x).\,g(x) = 1$, entonces $\dfrac{f'(x)}{f(x)} + \dfrac{g'(x)}{g(x)} = 0$.

f) La función $g(x) = |x-1| + 3|x|$ es derivable en todo su dominio.

S) Sea $f: \Re \to \Re \,/\, f(x) = \begin{cases} a\,x^2 + a^2x + a^3 & x>a \\ g(x) & x \leq a \end{cases}$, con $a \neq 0$, f es derivable en $x = a$ y $g(a) = 24$, Determinar $a \in \Re$.

T) Hallar k para que $f(2) = f'(2)$ si $f(x) = \dfrac{kx+2}{3x-1}$

U) Hallar $k \in [0;2\pi]$ para que $f'(1) = -1$ si $f(x) = x^{cos\,(kx)}$

V) Decir si es V o F:

a) La derivada del producto de una función par y una impar es par.
b) La derivada del cociente entre dos funciones impares es par.
c) La derivada de la inversa de una función par es impar es par.

RESPUESTAS

Cálculo de derivadas

A) 1) $y'(1)=1$ 2) $y'(-2)=-65$ 3) $y'(4)=\frac{1}{4}$

4) $y'(-1)=-1$ 5) $y'(1)=-\frac{1}{2}$ 6) no existe

B) 1) $y'=3x^2+1$ 2) $y'=4x+3$ 3) $y'=-\frac{1}{x^2}$

4) $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ 5) $y'=\frac{1}{2x.\sqrt{x}}$

C) 1) $y'=5x^4-9x^2$ 2) $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{x^2}$ 3) $y'=\frac{4x^3}{a}+\frac{2x}{b}+1$

4) $y'=3ax^2-\frac{1}{b}$ 5) $y'=4x.\left(1+3x+10x^3\right)$ 6) $y'=\ln x+1$

7) $f'(t)=6t^2-26t+12$ 8) $y'=18x^2+26x+6$ 9) $y'=\frac{4x^3.\left(8-x^2\right)}{\left(4-x^2\right)^2}$

10) $y'=-\frac{10}{(5+x)^2}$ 11) $y'=\frac{x^2.\left(3+x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}$

12) $f'(t)=\frac{t^4-2t^3-6t^2-2t+1}{\left(t^2-t-2\right)^2}$ 13) $y'=\cos(2x)$ 14) $y'=\frac{1}{1+\cos x}$

15) $y'=\frac{e^x.\left(tg\,x-\sec^2 x\right)}{tg^2 x}$ 16) $y'=\operatorname{arc\,sen} x+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

17) $y'=10x.\left(x^2+4\right)^4$ 18) $y'=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$ 19) $y'=\frac{3.(1-x)}{2.\sqrt{3-x}}$

20) $y'=\frac{3x^2-1}{2.\sqrt{x^3-x}}$ 21) $y'=\frac{1}{(1-x).\sqrt{1-x^2}}$

22) $y'=\frac{1}{4.\sqrt{1-x}.\sqrt{1-\sqrt{1-x}}}$ 23) $y'=\frac{2x+1}{3.\sqrt[3]{\left(x^2+x+1\right)^2}}$

24) $y'=\frac{2}{1-x^2}$ 25) $y'=4.e^{4x+1}$ 26) $y'=7^{x^2+3x+2}.(2x+3).\ln 7$

27) $y'=\frac{e^{\sqrt{x}}}{2.\sqrt{x}}$ 28) $y'=2.e^{x^2}.\left(x.\ln x^2+\frac{1}{x}\right)$ 29) $y'=sen\,(2x)$

30) $y'=\cos 2(x+a)$ 31) $y'=\frac{\cos \ln x}{x}$ 32) $y'=\frac{2}{sen(2x)}$

33) $y'=\frac{1}{\cos x}$ 34) $y'=6.sen^2(2x).\cos(2x)+\frac{\sec^2 \ln x}{x}$

35) $y'=sen\,\frac{2\sqrt{x}}{x+1}.\frac{x-1}{2.\sqrt{x}.(x+1)^2}$ 36) $f'(t)=2.t.cotg\,t.\left(cotg\,t-t.cosec^2\,t\right)$

37) $y'=x^x.(\ln x+1)$ 38) $y'=\frac{1}{2.\sqrt{1-x^2}.\sqrt{\operatorname{arc\,sen} x+1}}$

39) $y'=tg^3 x$ 40) $y'=x^{sen\,x}.\left(\cos x.\ln x+\frac{sen\,x}{x}\right)+1$

41) $y'=\frac{\left[x^{2x}.(2\ln x+2)-3x^2\right]x-\left(x^{2x}-x^3\right)2}{x^3}$ 42) 0

43) $y'=\frac{2}{1+x^2}$ 44) $y'=\frac{1}{1+x^2}$ 45) $y'=\frac{1}{1+x^2}$

46) $y'=\frac{1}{2.\left(1+\sqrt{x+1}\right)}$ 47) $y'=\sec x$ 48) $y'=\frac{1}{x.\ln x.\ln(\ln x)}$

D) 1) m = –1; 2) $x=1\pm\sqrt{2}$; 3) (–1;2/3), (3;2); 4) (1;4/3)

E) 1) $x=0, x=4$; 2) no existe; 3) $x=0$; 4) (3;5), (1;19/3)

F)

1) $y_t=2x$ $y_n=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ 2) $y_t=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ $y_n=-2x+3$ 3) $y_t=4x-3$ $y_n=-\frac{1}{4}x-3$ 4) $y_t=-7x-5$ $y_n=\frac{1}{7}x+\frac{15}{7}$

5) $y_t=x$ $y_n=-x+2$ 6) $y_t=-x-1$ $y_n=x-3$

G) (1;6) y (–1; –4) H) 1) (2;5), (–2; –11), 2) (1; –2), (–1; –4)

I) 1) (5;0), (–5;0) 2) (–2;4), P.I. 3) (1;0), P.I.
4) (0;1), punto cuspidal, 5) (3;2), P.I. 6) (2;1), P.I.

J) 1) $y''' = -6\,sen\,x - 2x.\cos x$ 2) $y''' = \dfrac{2}{x^3}$ 3) $y^{v} = 32\cos(2x)$

5) $y''' = -\dfrac{8x}{(1+x^2)^3}$ 6) $y'' = -\dfrac{x}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$ 7) $y^{n} = e^{x}.(x+n)$

8) $y^{n} = (-1)^{n-1}.\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}$

K) 1) $f'(3)^+ = 1,\ f'(3) = -1,$ 2) $f'(1)^+ = 1, f'(1)^- = 0,$
3) $f'(2)^+ = 1,\ f'(2)^- = 2,$ 4) $f'(1)^+ = -2,\ f'(1)^- = 3,$
5) $f'(½)^+ = f'(½)^- = 1,\ f'(1)^+ = 2,\ f'(1)^- = 1, \nexists f'(2)^+,\ f'(2)^-$

L) 1) $f'(x) = 1,\ (f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{2}$ 2) $f'(x) = 3x^2,\ (f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{3.\sqrt[3]{x^2}}$

3) $f'(x) = 2x.e^{x^2},\ (f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{2x.\sqrt{\ln x}}$

4) $f'(x) = 2\cos(2x),\ (f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$

M) $(f^{-1})'(2) = 2/3$

N) 1) a) $y' = -\dfrac{x^2}{y^2},\ y'' = -\dfrac{2x}{y^5}$ b) $y' = \dfrac{3y}{2y-3x},\ y'' = \dfrac{162}{(2y-3x)^3}$

c) $y' = -\dfrac{b^2 x}{a^2 y},\ y'' = -\dfrac{b^4}{a^2 y^3}$ d) $y' = -\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}},\ y'' = \dfrac{1}{3.\sqrt[3]{x^4 y}}$

e) $y' = -\dfrac{x}{y},\ y'' = -\dfrac{1}{y^3}$

2) $y'' = \dfrac{111}{256}$ 3) $y'' = -\dfrac{1}{16}$ 4) $y'' = -\dfrac{2y^2+2}{y^5}$

O) $f'(3)^+ = -1,\ f'(3)^- = 2$, punto anguloso.

P) a) $f'[f(x)] = \cos sen\,x$, b) $f'[f(x)] = 3x^6$, c) $f'[f(x)] = 2x^2 + 10$

Q) a) $f[f'(x)] = 32x^2$, b) $f[f'(x)] = sen\,[4\cos(2x)]$, c) $f[f'(x)] = 5$

R) a) F, porque hay un punto anguloso en $x = 8$. b) V, c) F, ya que la función no es continua en $x = 3$, d) V, e) V f) F, $\nexists g'(0)$ ni $g'(1)$.

S) $a = 2$; T) $k = -16/11$ U) $k = \pi$, V) a) V, b) F, c) F

Capítulo 6

Diferencial

Diferencial de una función en un punto: definición.

Función diferencial. Relación entre el incremento y el diferencial.

Interpretación geométrica.
Algebra de diferenciales.

Derivada de una función en forma paramétrica.
Derivadas sucesivas. Diferenciales sucesivos.

Aplicación de los diferenciales al cálculo de incertezas. Error relativo y error porcentual.

La derivada logarítmica y el cálculo del error relativo y porcentual.

DIFERENCIALES

Recordemos antes la relación fundamental del límite:

$$\text{Si } \lim_{x\to x_0} f(x)=l \Leftrightarrow f(x)-l=\varepsilon \Leftrightarrow f(x)=l+\varepsilon \quad \begin{cases} \varepsilon\to 0 \; si \\ x\to x_0 \end{cases}$$

Diferencial de una función en un punto

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)+\varepsilon \quad \begin{cases} \varepsilon\to 0 \; si \\ \Delta x\to 0 \end{cases}$$

$$\Delta y = f'(x_0).\Delta x + \varepsilon.\Delta x$$

A la primera parte de la expresión se la llama diferencial de la función *f* en el punto x_0.

$$d y(x_0 ; \Delta x) = f'(x_0).\Delta x$$

El diferencial de una función en un punto es igual al producto de la derivada en el punto por el incremento de la variable independiente. Si en lugar de considerar un punto en particular tomamos un punto genérico se obtiene la **función diferencial**. El diferencial es función del punto y del incremento.

Función diferencial: $d y = f'(x).\Delta x$,

Ejemplos:

a) $d(sen\, x) = cos\, x.\Delta x$

b) $d(x^2) = 2x.\Delta x$

c) $dx = 1.\Delta x \Rightarrow dx = \Delta x$

Por lo tanto el diferencial de la variable independiente es igual a su incremento.

Otra expresión: $dy = f'(x).dx \Rightarrow f'(x) = \frac{dy}{dx}$ (otra expresión de la derivada).

Relación entre el incremento Δy y el diferencial dy

Vimos que $\Delta y = f'(x).\Delta x + \varepsilon.\Delta x$, donde $\varepsilon.\Delta x \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$, por lo tanto haciendo $\varepsilon_1 = \varepsilon.\Delta x$

$$\Delta y = dy + \varepsilon_1 \begin{cases} \varepsilon_1 \to 0 \ si \\ \Delta x \to 0 \end{cases}$$

Es decir que el incremento y el diferencial difieren en un infinitésimo cuando $\Delta x \to 0$. $\Delta y \cong dy$

Esto permite, para pequeñas variaciones de x ($\Delta x \to 0$), reemplazar el Δy por el dy. $f(x) = f(x_0) + \Delta y \cong f(x_0) + dy$.

Ejemplo

Calcular aproximadamente aplicando diferenciales $\sqrt{26}$.

Consideramos la función $y = \sqrt{x}$ y el punto $x_0 = 25$ cercano a 26 y en el cual conocemos lo que vale la función y su derivada.

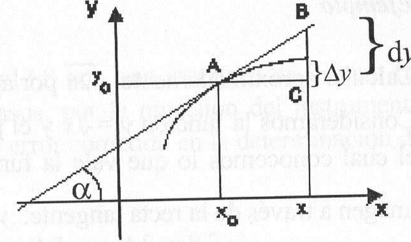
$$\sqrt{26} = \sqrt{25+1} = \sqrt{25} + \Delta y \cong 5 + dy\,(25;1)$$

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}.dx \Rightarrow dy\,(25;1) = \frac{1}{10}.1 = \frac{1}{10} \Rightarrow \sqrt{26} \cong 5 + 0{,}1 = 5{,}1$$

Condición para que una función sea diferenciable

Para que una función sea diferenciable en un punto debe ser derivable en el punto.

Interpretación geométrica



El diferencial mide la variación de la recta tangente al pasar del punto x_0 al punto incrementado $x = x_0 + \Delta x$.

Dem.: $f'(x_0) = tg\,\alpha = \frac{|BC|}{|AC|}$ $\quad dy = \frac{|BC|}{|AC|}.|AC| = |BC|$

$$dy(x_0) = \Delta y_t = y_t(x) - y_t(x_0)$$

Álgebra de Diferenciales

El cálculo del diferencial de una función se reduce en realidad al cálculo de la derivada. Por lo tanto los teoremas y fórmulas que se refieren a las derivadas siguen siendo válidos también para los diferenciales.

Ejemplos: a) $d\,(u+v) = du + dv$

b) $d\,(u.v) = v.du + u.dv$

c) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{du.v - u.dv}{v^2}$

Dem. a) $y = u+v \Rightarrow dy = y'.dx = (u'+v').dx = u'.dx + v'.dx = du + dv$

Dem. b) $y = uv \Rightarrow dy = y'.dx = (u'.v + u.v').dx = u'.v.dx + u.v'.dx = v.du + u.dv$

Aproximación Lineal utilizando Diferenciales

Ya vimos que $\Delta y \cong dy$ cuando $\Delta x \to 0$, por lo tanto:

$f(x) - f(x_0) \cong dy\,(x_0) = f'(x_0).\Delta x$

$f(x) \cong f(x_0) + f'(x_0).(x - x_0)$ | Ecuación de la recta tangente |

$y(x) \cong y_t(x) \quad \forall x \in E(x_0)$

Ejemplo

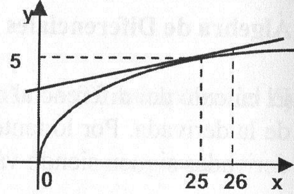
Calcular aproximadamente $\sqrt{26}$ por aproximación lineal.

Consideramos la función $y=\sqrt{x}$ y el punto $x_0=25$ cercano a $x=26$ y en el cual conocemos lo que vale la función y su derivada. Calculamos la imagen a través de la recta tangente: $y_t=\sqrt{25}+\dfrac{1}{2\sqrt{25}}(x-25)$

$$y_t(26)=5+\frac{1}{10}(26-25)=5{,}1\cong\sqrt{26}$$

Vemos que llegamos a lo mismo que aplicando diferenciales.

Nota: la aproximación lineal equivale a reemplazar la curva por su recta tangente en $x=x_0$.



Cálculo de Errores o Incertezas aplicando Diferenciales

Los diferenciales se pueden aplicar para calcular errores. Si dos magnitudes están relacionadas a través de una función, $y=f(x)$, a una variación Δx le corresponde una variación Δy. Si Δx es la incerteza o error que se comete en la medición de x, Δy es el error de $f(x)$. Pero como vimos que para pequeñas variaciones de x ($\Delta x\to 0$), $\Delta y\cong dy$, el error en la medición de $f(x)$ podemos decir que es dy.

Error relativo: $E_r=\dfrac{dy}{y}$

Error porcentual: E% es el error relativo por 100 = E_r.100. Indica el porcentaje de incerteza con que se efectuó la medición.

Ejemplo

Se mide el radio de un círculo $r=13{,}8$ con una incerteza de 0,1 cm (la incerteza está dada, en muchos casos, por la precisión del instrumento con el que se mide). Calculamos el error cometido en la determinación de la superficie $S=\pi.r^2$.

$dS=2.\pi.r.dr \Rightarrow dS=2.\pi.13{,}8.0{,}1=8{,}7\ \therefore\ \Delta S\cong 8{,}7$.

$S=598{,}28\ \text{cm}^2 \Rightarrow E_r=\dfrac{8{,}7}{598{,}28}=0{,}0145$, $E\%=1{,}45\%$.

La derivada logarítmica y el cálculo del error relativo y porcentual

A veces conviene calcular el error relativo utilizando la derivada logarítmica. Por ejemplo: Dada $y=\dfrac{2}{x^3}$, calcular el error relativo y el error porcentual al pasar x de 30 a 31.

$$y=\frac{2}{x^3}\Rightarrow \ln y=\ln 2-3\ln x\ .\ \frac{1}{y}.\frac{dy}{dx}=-\frac{3}{x}\Rightarrow \frac{dy}{y}=-3\frac{dx}{x}.$$

$\dfrac{dy}{y}(30;1)=-\dfrac{3}{30}=-\dfrac{1}{10}\Rightarrow$ el error relativo es 0,1 y el error porcentual es del 10%.

Derivada de una Función en Forma Paramétrica

Veremos como se calcula la derivada cuando la función viene dada en su forma paramétrica:

$$\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t)\end{cases},\quad y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{g'(t).dt}{f'(t).dt}=\frac{g'(t)}{f'(t)}=\frac{y'_t}{x'_t}$$

Ejemplo: hallar la derivada en el punto en el cual $t=2$ si $\begin{cases} x=4t \\ y=3t^2+5 \end{cases}$

$$y'_x=\frac{6t}{4}=\frac{3t}{2} \Rightarrow y'_x(2)=3$$

Derivadas sucesivas

Vimos que si $\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$, entonces $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}$ (1).

Para hallar la derivada segunda de y con respecto a x $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ se debe derivar respecto de x la expresión (1) teniendo en cuenta que t es función de x y que $t'_x=\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{1}{x'_t}$.

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right).t'_x=\frac{y''_t.x'_t-y'_t.x''_t}{(x'_t)^2}.\frac{1}{x'_t}=\frac{y''_t.x'_t-y'_t.x''_t}{(x'_t)^3}$$

Ejemplo: $\begin{cases} x=2t^3+t \\ y=3t^2 \end{cases} \Rightarrow y'_x=\dfrac{6t}{6t^2+1}$

$$y''_x=\frac{6.(6t^2+1)-6t.12t}{(6t^2+1)^2}.\frac{1}{6t^2+1}=\frac{6-36t^2}{(6t^2+1)^3}$$

Diferenciales Sucesivos

Dada una función $y=f(x)$ ya vimos que su diferencial es $df=f'(x).dx$, diferencial que recibe el nombre de diferencial primero. Si de esta nueva función calculamos su diferencial tenemos el diferencial segundo:

$$d^2f=d(df)=d[f'(x).dx]=[f''(x).dx].dx=f''(x).dx^2.$$

Si de esta nueva función calculamos su diferencial tenemos el diferencial tercero: $d^3f=d(d^2f)=d[f''(x).dx^2]=[f'''(x).dx^2].dx=f'''(x).dx^3$, y así sucesivamente:

$$\boldsymbol{d^n f(x)=f^n(x).dx^n}$$

Otra forma de calcular Derivadas de Funciones Implícitas

Dada, por ejemplo $xy+x-2y=3$, buscamos y'. Diferenciando la expresión podemos obtener la derivada teniendo en cuenta que $f'(x)=\dfrac{dy}{dx}$.

El primer término se diferencia como producto:

$1.dx.y+x.1.dy+1.dx-2.dy=0 \Rightarrow (y+1).dx+(x-2).dy=0$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{dy}{dx}=-\frac{y+1}{x-2}$$

Veamos otro ejemplo: $\dfrac{2x}{y}-\dfrac{3y}{x}=8$

$$\frac{2\,dx.y-2x.dy}{y^2}-\frac{3.dy.x-3y.dx}{x^2}=0 \Rightarrow$$

$$2x^2y.dx-2x^3dy-3xy^2.dy+3y^3.dx=0$$

$$(2x^2y+3y^3).dx-(2x^3+3y^2x).dy=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{2x^2y+3y^3}{2x^3+3y^2x}$$

EJERCICIOS GENERALES RESUELTOS

1) Calcular aproximadamente aplicando diferenciales.

a) $e^{0,002}$ b) $sen\ 31^{o}$

a) Consideramos la función $y = e^{x}$ y el punto $x_0 = 0$ cercano a 0,002 y en el cual conocemos lo que vale la función y su derivada.

$$e^{0,002} = e^{0+0,002} = e^{0} + \Delta y \cong e^{0} + dy\,(0;0,002)$$

$$dy = e^{x}.dx \Rightarrow dy\,(0;0,002) = e^{0} \text{ x } 0,002 = 1 \text{ x } 0,002 = 0,002$$

$$\Rightarrow e^{0,002} \cong 1 + 0,002 = 1,002$$

b) Consideramos la función $y = sen\,x$ y el punto $x_0 = \frac{\pi}{6}$ cercano a 31° y en el cual conocemos lo que vale la función y su derivada.

$$sen\,31^{o} = sen\,(30^{o} + 1^{o}) = sen\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}\right) = sen\,\frac{\pi}{6} + \Delta y$$

$$\cong 0,5 + dy\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}\right)$$

$$dy = cos\,x\,.\,dx \Rightarrow dy\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}\right) = cos\frac{\pi}{6}.\frac{\pi}{180} = \frac{\sqrt{3}}{2}.0,0174 =$$

$$= 0,015 \Rightarrow sen\,31^{o} \cong 0,5 + 0,015 = 0,515$$

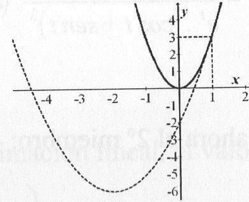
2) Calcular aproximadamente $y = \sqrt[3]{28}$ por aproximación lineal

Consideramos la función $y = \sqrt[3]{x}$ y el punto $x_0 = 27$ cercano a $x = 28$, en el cual conocemos lo que vale la función y su derivada. Calculamos la ecuación de la recta tangente.

$$x_0 = 27 \Rightarrow y_0 = 3,\ \ y' = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow y'(27) = \frac{1}{9}$$

$$y_t - 3 = \frac{1}{9}.(x - 27) \Rightarrow y_t = \frac{1}{9}x\ .\ \ y_t(28) = \frac{28}{9}\ \therefore\ \sqrt[3]{28} \cong \frac{28}{9}$$

3) Dada $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & x < 1 \\ x^2 + 4x - 2 & x \geq 1 \end{cases}$ calcular $y(1,01)$ por aproximación lineal. Graficar.



Calculamos la recta tangente en $x_0 = 1$. $y_0 = 3$. Calculamos las derivadas laterales:

$$f'(1)^{-} = \lim_{x\to 1^{-}} \frac{3x^2 - 3}{x - 1} = \lim_{x\to 1^{-}} \frac{3(x-1).(x+1)}{x-1} = 6$$

$$f'(1)^{+} = \lim_{x\to 1^{+}} \frac{x^2 + 4x - 2 - 3}{x - 1} = \lim_{x\to 1^{+}} \frac{(x-1).(x+5)}{x-1} = 6$$

$$y_t - 3 = 6(x - 1) \Rightarrow y_t = 6x - 3\ \therefore\ y(1,01) = 3,06$$

4) Probar que la función $y = f\,(x)$ dada por $\begin{cases} x = e^{t}.\,cos\,t \\ y = e^{t}.\,sen\,t \end{cases}$ con $t \in \mathbb{R}$, satisface la igualdad: $y''.(x + y)^2 = 2.(x.y' - y)$

Para eso calculamos las derivadas 1° y 2°:

$$y'_x = \frac{e^{t}.cos\,t - e^{t}.sen\,t}{e^{t}.sen\,t + e^{t}.cos\,t} = \frac{cos\ t - sen\,t}{sen\ t + cos\,t} \Rightarrow$$

$$y''_x = \frac{(-sen\,t - cos\,t).(sen\,t + cos\,t) - (sen\,t - cos\,t).(cos\,t - sen\,t)}{(sen\,t + cos\,t)^2}.$$

$$.\frac{1}{e^t.(sen\,t + cos\,t)} = -\frac{2}{e^t.(sen\,t + cos\,t)^3}$$

Desarrollamos el primer miembro de la igualdad:

$$-\frac{2}{e^t.(cos\,t + sen\,t)^3}.(e^t.cos\,t + e^t.sen\,t)^2 = \frac{-2\,e^{2t}.(cos\,t + sen\,t)^2}{e^t.(cos\,t + sen\,t)^3} =$$

$$= \frac{-2.e^t}{cos\,t + sen\,t}$$

ahora el 2º miembro:

$$2\left(e^t.sen\,t.\frac{cos\,t - sen\,t}{sen\,t + cos\,t} - e^t.cos\,t\right) =$$

$$= 2\frac{e^t.(sen\,t.cos\,t - sen^2\,t - sen\,t.cos\,t - cos^2\,t)}{sen\,t + cos\,t} = \frac{-2\,e^t}{cos\,t + sen\,t}$$

vemos que se verifica la igualdad.

5) Determinar la ecuación de la recta tangente al gráfico de la curva definida por:

$$\begin{cases} x = 2\ ln\,cotg\,t + 1 \\ y = tg\,t + cotg\,t \end{cases} \quad en\ t = \frac{\pi}{4}$$

Debemos determinar el punto y la pendiente. Si $t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x_0 = 1$ e $y_0 = 2$.

Calculamos y_x'.

$$y'_x = \frac{sec^2\,t - cosec^2 t}{\frac{2}{cotg\,t}.(-cosec^2 t)} \quad para\ t = \frac{\pi}{4}, y'_x = \frac{2-2}{2.(-2)} = 0$$

$$\Rightarrow\ y_t - 2 = 0.(x-1)\ \therefore\ y_t = 2$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1) Calcular las funciones diferenciales de las siguientes funciones

a) $y = \frac{1}{3}\ tg^3\,x + tg\,x$ b) $y = ln(1-x) + \frac{x.ln\,x}{1-x}$ c) $y = arc\ tg\ \frac{x}{a}$

2) Hallar incrementos y diferenciales de las siguientes funciones para los valores indicados

a) $y = 2x^2 - x$ para $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}01$
b) $y = x^3 + 2x$ para $x_0 = -1$, $\Delta x = 0{,}02$

3) Calcular, aplicando diferenciales o por aproximación lineal, el valor aproximado de:

a) $sen\,46°$ b) $tg\,46°$ c) $\sqrt{66}$ d) $\frac{1}{\sqrt{51}}$ e) $ln\,1{,}2$

4) Calcular la variación de la ordenada de la recta tangente a la gráfica de la curva $y = 3x^4 - 2x + 1$ al pasar de $x_0 = 1$ a $x_1 = 1{,}2$ sin calcular la recta tangente.

5) Aplicando diferenciales demostrar la validez de: $\sqrt{a^2 + b} \cong a + \frac{b}{2a}$ siendo b muy pequeño respecto a a.

6) Demostrar que un error del 1% cometido al determinar la longitud del radio da lugar a un error aproximado del 2% al calcular el área del círculo y el área de la esfera. A círculo = πr^2, A esfera = $4\pi r^2$.

7) Hallar los valores de x para los cuales se puede sustituir $\sqrt[5]{x}$ por $\sqrt[5]{x+1}$ con un error menor que 0,01.

8) Si $x^3 y + y^3 x - xy = 8$ define a y como función implícita de x en un entorno de $x_0 = 1$, hallar por aproximación lineal $y(0{,}998)$.

9) Dada $f(x)=\begin{cases} x^2-2x & x<2 \\ -x^2+6x-8 & x\geq 2 \end{cases}$ hallar por aproximación lineal $y(1{,}998)$.

10) Hallar las derivadas 1° y 2° de las siguientes funciones dadas en forma paramétrica.

a) $\begin{cases} x=4t^2+2 \\ y=t+3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x=ln\,t \\ y=t^3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x=arc\,tg\,x \\ y=ln\left(1+t^2\right) \end{cases}$ d) $\begin{cases} x=a.\cos t \\ y=a.sen\,t \end{cases}$

11) Diferenciar y calcular $f'(x)$ como $dy\,/\,dx$ si:

a) $y^2-3xy=9$ b) $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=1$

RESPUESTAS

1) a) $dy=sec^4 x.dx$ b) $dy=\dfrac{ln\,x}{(1-x)^2}.dx$ c) $dy=\dfrac{a}{a^2+x^2}.dx$

d) $dy=2e^{2x}.\left[ln\left(x^2+1\right)+\dfrac{x}{x^2+1}\right].dx$

2) a) $\Delta y=0{,}0302,\ dy=0{,}03$ b) $\Delta y=0{,}098808,\ dy=0{,}1$

3) a) 0,719448, b) 1,034906, c) 8,125 d) $\dfrac{7}{50}$ e) 0,2 6) $x>42{,}29$

4) $\Delta y_t=2$ 7) $x>20\sqrt[4]{20}$ 8) $y(0{,}998)\cong y_t(0{,}998)=2{,}002$

9) $y(1{,}998)\cong y_t(1{,}998)=-0{,}004$

10) a) $y'=\dfrac{1}{8t},\ y''=-\dfrac{1}{64\,t^3}$ b) $y'=3t^3,\ y''=9t^3$

c) $y'=2t,\ \ y''=2.(1+t^2)$ d) $y'=-\,cotg\,t,\ y''=-\dfrac{1}{a.sen^3 t}$

11) a) $y'=\dfrac{3y}{2y-3x}$ b) $y'=\dfrac{y^3-x^2y}{xy^2-x^3}=\dfrac{y}{x}$

Capítulo 7

Análisis de funciones

Funciones monótonas: crecientes y decrecientes.

Extremos relativos y absolutos: criterios de la derivada 1° y 2°.

Concavidad y convexidad de una función, puntos de inflexión.

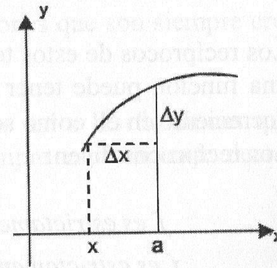
Estudio completo de una función.

ANÁLISIS DE FUNCIONES

Funciones crecientes y decrecientes

Función estrictamente creciente en un punto

Una función f es estrictamente creciente en $x = a \in Df$ si

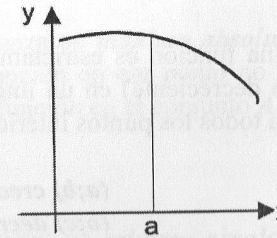


$$\forall x \in E(a): \begin{cases} x < a \Rightarrow f(x) < f(a) \\ x > a \Rightarrow f(x) > f(a) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \; sg\ \Delta x = sg\ \Delta y$

Función estrictamente decreciente en un punto

Una función f es estrictamente decreciente en $x = a \in Df$ si



$$\forall x \in E(a): \begin{cases} x < a \Rightarrow f(x) > f(a) \\ x > a \Rightarrow f(x) < f(a) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \; sg\ \Delta x \neq sg\ \Delta y$

Criterio de la derivada 1° *(para funciones derivables)*

Si la derivada 1° de una función en un punto $x = a$ es positiva entonces la función es estrictamente creciente en el punto $x = a$.

Demostración

$f'(a) > 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0 \Rightarrow \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$ ya que Δx y Δy tienen el mismo signo por lo tanto f es estrictamente creciente en $x = a$.

Análogamente se puede demostrar que *si la derivada primera es negativa la función es estrictamente decreciente en el punto.*

Síntesis

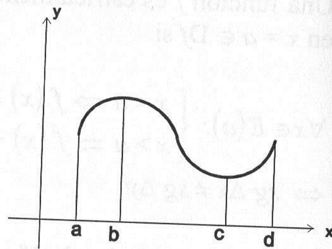
$$f'(a) > 0 \Rightarrow f \text{ es estrictamente creciente en } x = a$$
$$f'(a) < 0 \Rightarrow f \text{ es estrictamente decreciente en } x = a$$

Los recíprocos de estos teoremas no son verdaderos en general porque una función puede tener derivada nula en un punto y ser creciente o decreciente en él, como se verifica en $y = x^3$ o $y = -x^3$.
Los recíprocos dicen:

$$f \text{ es estrictamente creciente en } x = a \Rightarrow f'(a) \geq 0$$
$$f \text{ es estrictamente decreciente en } x = a \Rightarrow f'(a) \leq 0$$

Crecimiento en un intervalo

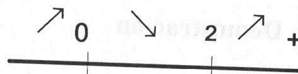
Una función es estrictamente creciente (o decreciente) en un intervalo si lo es en todos los puntos interiores al mismo.



(a;b) creciente
(b;c) decreciente
(c;d) creciente

Ejemplo: determinar los intervalos de crecimiento de $f(x) = x^3 - 3x^2$
Para eso debemos ver para que intervalos la derivada primera es positiva o negativa.

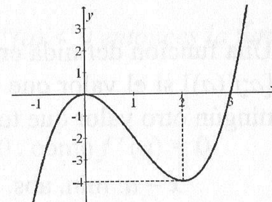
$f'(x) > 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x > 0 \;\therefore\; 3x.(x-2) > 0.$



Para eso factoreamos, con las raíces de cada factor dividimos el dominio en subintervalos y analizamos el signo de cada factor para cada subintervalo.

Luego analizamos el signo final aplicando la regla de los signos.

	$3x$	$x-2$		
$(-\infty;0)$	$-$	$-$	$+$	creciente
$(0;2)$	$+$	$-$	$-$	decreciente
$(2;+\infty)$	$+$	$+$	$+$	creciente



Función monótona: se llama así a las funciones que son siempre crecientes o siempre decrecientes.

Función estrictamente monótona: se llama así a las funciones que son siempre estrictamente crecientes o siempre estrictamente decrecientes.

EXTREMOS ABSOLUTOS

Máximo absoluto

Una función definida en un conjunto A alcanza un ***máximo absoluto*** en $[a;f(a)]$ si el valor $f(a)$ que toma la función en ese punto no es superado por ningún otro valor que toma la función en el conjunto A.

Mínimo absoluto

Una función definida en un conjunto A alcanza un ***mínimo absoluto*** en $[a;f(a)]$ si el valor $f(a)$ que toma la función en ese punto no supera a ningún otro valor que toma la función en el conjunto A.

EXTREMOS RELATIVOS O LOCALES

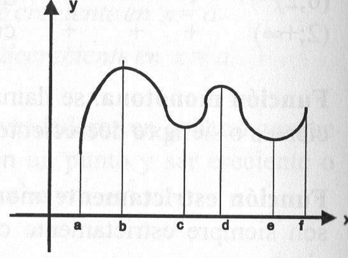
Máximo relativo

Una función definida en un conjunto A alcanza un ***máximo relativo*** en $[a;f(a)]$ si el valor que toma la función en ese punto $f(a)$ no es superado por ningún otro valor que toma la función en un entorno del punto $x = a$.

Mínimo relativo

Una función definida en un conjunto A alcanza un ***mínimo relativo*** en $[a;f(a)]$ si el valor que toma la función en ese punto $f(a)$ no supera a ningún otro valor que toma la función en un entorno de $x = a$.

$x = a$ mín. abs.
$x = b$ máx. abs. y rel.
$x = c$ mín. rel.
$x = d$ máx. rel.
$x = e$ mín. rel.



Propiedad de los extremos absolutos

Si el extremo absoluto corresponde a un punto interior al conjunto considerado, entonces también es extremo relativo.

Cálculo de extremos relativos

a) para funciones derivables

Condición necesaria

Si una función derivable alcanza un extremo relativo en x = a, la derivada primera en ese punto se anula.

Eso se debe a que en ese punto la curva no es creciente ni decreciente, por lo tanto la derivada primera no puede ser positiva ni negativa. Esta condición es necesaria pero no suficiente. Debemos analizar condiciones suficientes.

Condición suficiente

A) Criterio del signo de la derivada primera

Si al atravesar un punto que cumple con la condición necesaria la derivada primera pasa de ser positiva a negativa, en el punto hay un máximo relativo, si pasa de ser negativa a positiva, hay un mínimo relativo. Si no cambia de signo no hay extremos.

B) Criterio del signo de la derivada segunda o condición suficiente

Si f tiene derivada finita en x=a, f' (a) = 0 y f ''(a) < 0 entonces la función alcanza un máximo relativo en [a;f (a)].

Demostración: $f''(a) = \lim_{x \to a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a} < 0$, como $f'(a) = 0$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{x-a} < 0 \Rightarrow f'(x) \text{ y } \Delta x \text{ tienen signos opuestos}$$

$$\begin{cases} \textit{a izquierda} \quad x-a<0 \Rightarrow f'(x)>0 \therefore f \textit{ es creciente} \\ \textit{a derecha} \quad x-a>0 \Rightarrow f'(x)<0 \therefore f \textit{ es decreciente} \end{cases}$$

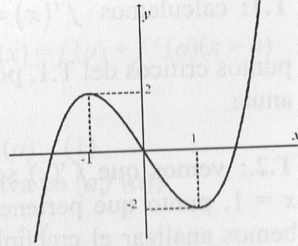
por lo tanto en $[a;f(a)]$ hay un máximo relativo.

Análogamente se puede demostrar que si $f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0$ entonces en $[a;f(a)]$ hay un mínimo relativo.

Síntesis: $f'(a) = 0$ y $\begin{cases} f''(a) < 0 \Rightarrow \textit{máx. rel.} \\ f''(a) > 0 \Rightarrow \textit{mín. rel.} \end{cases}$

Ejemplo: hallar extremos de $f(x) = x^3 - 3x$

Buscamos los puntos para los cuales se anula la derivada primera: $3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow$ $x_1 = 1$, $x_2 = -1$. Analizamos el signo de la derivada segunda en dichos puntos para ver si son máximos o mínimos, $f''(x) = 6x$.



$f''(1) = 6 > 0 \Rightarrow$ en $(1;-2)$ hay un mínimo relativo.
$f''(-1) = -6 < 0 \Rightarrow$ en $(-1;2)$ hay un máximo relativo.

b) para funciones no derivables

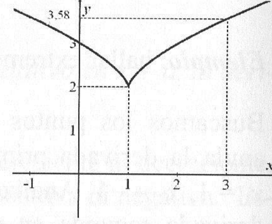
Si la función no es derivable en $x = a$, entonces debemos aplicar el criterio A), es decir, analizar el signo de la derivada primera a izquierda y a derecha de $x = a$ y ver si éste cambia.

Tipo 1: c es interior al intervalo y $f'(c) = 0$. (como ya vimos)
Tipo 2: $c \in Df$, es interior al intervalo y $f'(c)$ no está definida.
Tipo 3: c es uno de los extremos del intervalo.

Que un punto sea crítico no significa que deba alcanzar un extremo necesariamente, simplemente quiere decir que puede haber en él un extremo. Luego hay que verificar si hay o no extremo. En cada caso debe hacerse el siguiente análisis:

Tipo 1: se debe analizar el signo de $f''(c)$ (si no se anula) para determinar si hay extremo o no y qué tipo de extremo es o el signo de $f'(x)$ a izquierda y a derecha.
Tipo 2: se debe analizar el crecimiento a izquierda y a derecha para determinar si hay o no extremo y qué tipo de extremo es.
Tipo 3: se calcula el valor que toma la función en esos puntos y se compara con el valor que toma la función en los puntos interiores.

Ejemplo: calcular extremos de $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2}+2$ en [0;3]



T.1: calculamos $f'(x)=\dfrac{2}{3.\sqrt[3]{x-1}}$. No hay puntos críticos del T.1. porque $f'(x)$ nunca se anula.

T.2.: vemos que $f'(x)$ se hace infinita para $x = 1$, punto que pertenece al dominio. Debemos analizar el crecimiento a izquierda y a derecha para ver si es extremo.
$x > 1, f'(x) > 0$; $x < 1, f'(x) < 0$ por lo tanto en $x = 1$ hay un mínimo porque la función decrece izquierda y crece a derecha. La función alcanza un mínimo relativo en (1;2).

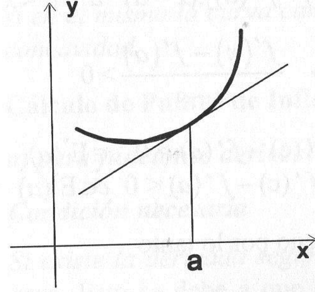
T.3.: $x = 0$ y $x = 3$, que son los extremos del intervalo. Vemos los valores que toma la función en ellos: $f(0) = 3$, $f(3) = 3{,}58$. La función alcanza en (3;3,58) un máximo absoluto y vemos que en (1;2) el mínimo es absoluto.

$x > 1, f'(x) > 0$; $x < 1, f'(x) < 0$ por lo tanto en $x_1 = 1$ hay un mínimo porque la función decrece izquierda y crece a derecha. La función alcanza un mínimo relativo en (1;2).

T.3.: $x_2 = 0$ y $x_3 = 3$, que son los extremos del intervalo. Vemos los valores que toma la función en ellos: $f(0) = 3$, $f(3) = 3{,}58$. La función alcanza en (3;3,58) un máximo absoluto y vemos que en (1;2) el mínimo es absoluto.

CONCAVIDAD DE UNA CURVA

Curva cóncava en un punto



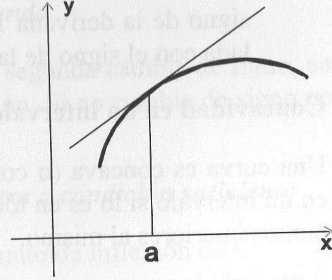
La curva correspondiente a una función derivable es cóncava en [a;f(a)] si y solo si existe un entorno reducido de ***x = a*** *donde la curva está por sobre la recta tangente a la curva en el punto. Se dice que la función es cóncava en [a;f(a)].*

La recta tangente a la curva en $[a;f(a)]$ es: $t(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$
Consideramos la función auxiliar:

$g(x) = f(x) - t(x) = f(x) - f'(a).(x-a) - f(a)$ (1)

$g(x) > 0 \ \forall x \in E^*(a) \Rightarrow$ la curva es cóncava en $[a;f(a)]$

Curva convexa en un punto



La curva correspondiente a una función derivable es convexa en [a;f(a)] si y solo si existe un entorno reducido de ***x = a*** *donde la curva está por debajo de la recta tangente a la curva en el punto. Se dice que la curva es convexa en* ***x = a***.

$g(x) < 0 \ \forall x \in E^*(a) \Rightarrow$ la curva es convexa en $[a;f(a)]$

Criterio de la derivada 2º

Si la derivada 2º es positiva en x = a, entonces la curva es cóncava en el punto [a;f (a)].

Demostración

Consideramos $g(x) = f(x) - f'(a).(x-a) - f(a) = [f(x) - f(a)] - f'(a).(x-a) \quad \forall x \in E^*(a)$.

Aplicamos al corchete el teorema del valor medio de Lagrange

$g(x) = f'(c).(x-a) - f'(a).(x-a) = [f'(c) - f'(a)].(x-a) \quad a < c < x$

Pero $f''(a) > 0$: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x) - f'(a)}{x-a} > 0 \Rightarrow \dfrac{f'(x) - f'(a)}{x-a} > 0$

$x > a$: $f'(x) > f'(a) \Rightarrow f'(c) > f'(a) \therefore f'(c) - f'(a) > 0 \quad c \in E^*(a)$
$x < a$: $f'(x) < f'(a) \Rightarrow f'(c) < f'(a) \therefore f'(c) - f'(a) < 0 \quad c \in E^*(a)$

$[f'(c) - f'(a)]$ y $(x-a)$ tienen el mismo signo por lo tanto
$[f'(c) - f'(a)].(x-a) > 0 \Rightarrow g(x) > 0$.

f es cóncava en el punto $[a;f(a)]$.

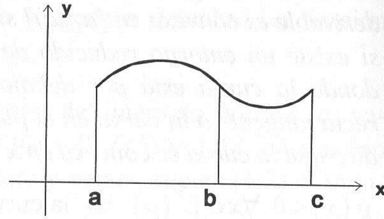
De la misma manera se puede demostrar que si $f''(a) < 0$ entonces la curva es convexa en el punto $[a;f(a)]$.

Nota: Así como el crecimiento de una función está vinculado con el signo de la derivada 1º, la concavidad de una curva está vinculada con el signo de la derivada 2º.

Concavidad en un intervalo

Una curva es cóncava (o convexa) en un intervalo si lo es en todos los puntos interiores al mismo.

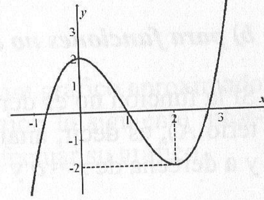
en ***(a;b)*** la curva es ***convexa***
en ***(b;c)*** la curva es ***cóncava***



Ejemplo: determinar intervalos de concavidad de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

Calculamos las derivadas:

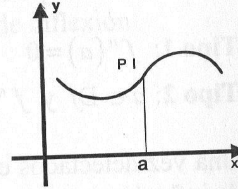
$f'(x) = 3x^2 - 6x \Rightarrow f''(x) = 6x - 6$.



$f''(x) > 0 \Rightarrow 6(x-1) > 0 \Rightarrow x > 1 \therefore$ en $(1;+\infty)$ la curva es cónc.
$f''(x) < 0 \Rightarrow 6(x-1) < 0 \Rightarrow x < 1 \therefore$ en $(-\infty;1)$ la curva es conv.

PUNTOS DE INFLEXIÓN

En [a;f (a)] hay un punto de inflexión sí y solo sí en el mismo la curva cambia el sentido de la concavidad.



Cálculo de Puntos de Inflexión

a) para funciones derivables

Condición necesaria

Si existe la derivada segunda de la función en x = a, ésta debe valer cero. Esto se debe a que en ese punto la curva no es ni cóncava ni convexa y por lo tanto su derivada segunda no puede ser ni positiva ni negativa. Esta condición es necesaria pero no suficiente. Debemos analizar condiciones suficientes.

Condición suficiente

A) Criterio del signo de la derivada segunda

Si al atravesar el punto $x = a$ la derivada segunda cambia de signo, en el punto $[a; f(a)]$ hay un punto de inflexión. Si no cambia de signo no hay punto de inflexión.

B) Criterio del signo de la derivada tercera o condición suficiente

Si $f''(a) = 0$ y $f'''(a) \neq 0$, $[a; f(a)]$ es punto de inflexión de f.

Síntesis: Si en $x = a$, $f''(a) = 0$ y $f'''(a) \neq 0$, en $[a; f(a)]$ hay un P.I.

b) para funciones no derivables

Si la función no es derivable en $x = a$, entonces debemos aplicar el criterio A), es decir, analizar el signo de la derivada segunda a izquierda y a derecha de $x = a$ y ver si éste cambia.

Existencia de puntos de inflexión

Vamos a ver los puntos donde puede haber puntos de inflexión:

Tipo 1: $f''(a)=0$

Tipo 2: $a \in Df$ y $f''(a)$ no está definida.

Una vez detectados estos puntos debemos verificar si son o no puntos de inflexión.

Tipo 1: utilizamos los criterios A o B como condición suficiente.

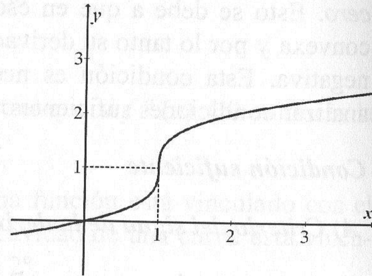
Tipo 2: utilizamos el criterio A como condición suficiente.

Ejemplo: calcular puntos de inflexión de $f(x)=\sqrt[3]{x-1}+1$

T.1.: calculamos las derivadas:

$$f'(x)=\frac{1}{3.\sqrt[3]{(x-1)^2}},$$

$$f''(x)=-\frac{2}{9.\sqrt[3]{(x-1)^5}}$$



vemos que no hay P.I. del T.1. porque la función $f''(x)$ no se anula.

T.2.: x_1=1, porque $\nexists f''(1)$. Analizamos la concavidad a izquierda y a derecha de x_1=1. $x>1$, $f''(x)<0 \Rightarrow$ la curva es convexa.
$x<1$, $f''(x)>0 \Rightarrow$ la curva es cóncava. Vemos que hay un cambio en la concavidad de la curva por lo tanto hay punto de inflexión en (1;1).

ANÁLISIS COMPLETO DE UNA FUNCIÓN

El objetivo es, dada una función, poder obtener un gráfico aproximado de la misma. Para ello obtendremos de la función la siguiente información y luego, a partir de ella, trataremos de efectuar su gráfico.

a) Dominio
b) Ceros
c) Intersección con el eje y
d) Paridad
e) Asíntotas
f) Extremos
g) Intervalos de crecimiento
h) Puntos de inflexión
i) Intervalos de concavidad

Ejemplos: 1) $y=\frac{8}{x^2-4}$

a) Dominio $\Re-\{2;-2\}$

b) Ceros $\frac{8}{x^2-4}=0 \Rightarrow \nexists$ ceros

c) Intersección con el eje y $f(0)=\frac{8}{0^2-4}=-2$

d) Paridad $f(-x)=\frac{8}{(-x)^2-4}=\frac{8}{x^2-4}=f(x) \Rightarrow$ que la función es par

e) Asíntotas

i) Vertical $x^2-4=0 \Rightarrow x_1=2,\ \ x_2=-2$

Diversificación $\lim_{x\to 2^+}\frac{8}{x^2-4}=+\infty$ $\lim_{x\to 2^-}\frac{8}{x^2-4}=-\infty$

$\lim_{x\to -2^+}\frac{8}{x^2-4}=-\infty$ $\lim_{x\to -2^-}\frac{8}{x^2-4}=+\infty$

ii) Horizontal u oblicua

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{8}{x.(x^2-4)}=0 \quad b=\lim_{x\to\infty}\frac{8}{x^2-4}-0=0 \Rightarrow y=0 \text{ es A.H.}$$

f) Extremos

T.1: $y' = \dfrac{-16x}{(x^2-4)^2} = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

$$y'' = \frac{-16.(x^2-4)^2 + 16x.2.(x^2-4).2x}{(x^2-4)^4} = \frac{48x^2+64}{(x^2-4)^3}$$

$y''(0) = -1 < 0 \Rightarrow 1$ en (0;–2) hay un máximo relativo

T.2. $x_2 = 2$, $x_3 = -2$ pero no pertenecen al dominio, por lo tanto no hay.

T.3. no hay

g) Intervalos de crecimiento

$y' > 0 \Rightarrow y' = \dfrac{-16x}{(x^2-4)^2} > 0,\ -16x > 0 \Rightarrow x < 0, en\,(-\infty;0) - \{-2\}$

f es creciente

$y' < 0 \Rightarrow y' = \dfrac{-16x}{(x^2-4)^2} < 0,\ -16x < 0 \Rightarrow x > 0, en\,(0;+\infty;) - \{2\}$

f es decreciente

h) Puntos de inflexión

T.1.: $y'' = \dfrac{48x^2+64}{(x^2-4)^3} = 0 \Rightarrow 48x^2 + 64 = 0\ \therefore$ no hay P.I.

T.2.: $x_2 = 2$, $x_3 = -2$ pero no pertenecen al dominio, por lo tanto no hay.

i) Intervalos de concavidad

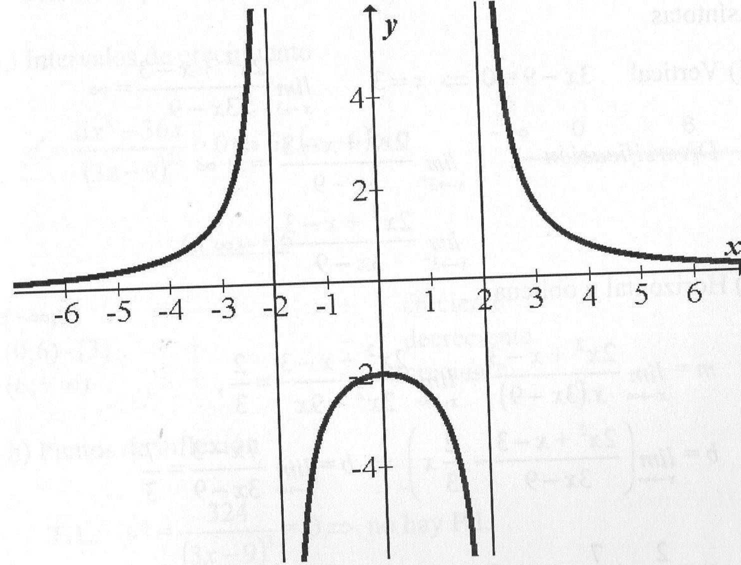
$y'' > 0 \Rightarrow \dfrac{48x^2+64}{(x^2-4)^3} > 0 \Rightarrow x^2 - 4 > 0,\ x^2 > 4 \Rightarrow |x| > 2$

en $(-\infty;-2) \cup (2;+\infty)$ la curva es cóncava.

$y'' < 0 \Rightarrow \dfrac{48x^2+64}{(x^2-4)^3} < 0 \Rightarrow x^2 - 4 < 0,\ x^2 < 4 \Rightarrow |x| < 2$

en $(-2;2)$ la curva es convexa.

Con toda esta información procedemos a hacer el gráfico aproximado.



2) $y = \dfrac{2x^2+x-3}{3x-9}$

a) Dominio $\qquad \Re - \{3\}$

b) Ceros

$y = \dfrac{2x^2+x-3}{3x-9} = 0 \Rightarrow 2x^2 + x - 3 = 0\ \therefore\ x_1 = 1 \wedge x_2 = -1{,}5$

c) Intersección con el eje *y* $\qquad f(0) = \dfrac{2.0+0-3}{3.0-9} = \dfrac{1}{3}$

d) Paridad

$$f(-x)=\frac{2(-x)^2+(-x)-3}{3.(-x)-9}=\frac{2x^2-x-3}{-3x-9}\neq f(x)\wedge\neq -f(x)\ \Rightarrow$$

f no tiene paridad

e) Asíntotas

i) Vertical $\quad 3x-9=0\Rightarrow x=3 \qquad \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2+x-3}{3x-9}=\infty$

Diversificación $\qquad \lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{2x^2+x-3}{3x-9}=+\infty$

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{2x^2+x-3}{3x-9}=-\infty$$

ii) Horizontal u oblicua

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x-3}{x.(3x-9)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x-3}{3x^2-9x}=\frac{2}{3},$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+x-3}{3x-9}-\frac{2}{3}x\right)\Rightarrow b=\lim_{x\to\infty}\frac{7x-3}{3x-9}=\frac{7}{3}$$

$y=\dfrac{2}{3}x+\dfrac{7}{3}$ es A.O.

f) Extremos

T.1.

$$y'=\frac{(4x+1).(3x-9)-(2x^2+x-3).3}{(3x-9)^2}=\frac{6x^2-36x}{(3x-9)^2}=0\Rightarrow x_1=0\wedge x_2=6$$

$$y''=\frac{(12x-36).(3x-9)^2-(6x^2-36x).2.(3x-9).3}{(3x-9)^4}=\frac{324}{(3x-9)^3}$$

$y''(0)=-\dfrac{324}{819}<0\Rightarrow$ en $\left(0;\frac{1}{3}\right)$ hay un máximo relativo

$y''(6)=\dfrac{324}{819}>0\Rightarrow$ en $\left(6;\frac{25}{3}\right)$ hay un mínimo relativo

T.2: $x_3=3$, pero no pertenece al dominio, por lo tanto no hay extremo.

T.3: no hay

g) Intervalos de crecimiento

$y'=\dfrac{6x^2-36x}{(3x-9)^2}>0\Rightarrow 6x.(x-6)>0 \qquad -\infty \quad 0 \quad 6 \quad +\infty$

	6x	x − 6		
(−∞;0)	−	−	+	creciente
(0;6)−{3}	+	−	−	decreciente
(6;+∞)	+	+	+	creciente

h) Puntos de inflexión

T.1.: $y''=\dfrac{324}{(3x-9)^3}=0\Rightarrow$ no hay P.I.

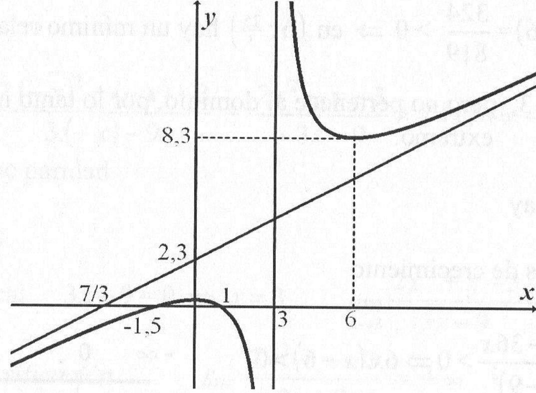
T.2.: $x=3$, pero no pertenece al dominio, por lo tanto no hay.

i) Intervalos de concavidad

$y''>0\Rightarrow\dfrac{324}{(3x-9)^3}>0\therefore 3x-9>0\Rightarrow x>3$. En $(3;+\infty)$ es cóncava.

$y''<0\Rightarrow\dfrac{324}{(3x-9)^3}<0\therefore 3x-9<0\Rightarrow x<3$. En $(-\infty;3)$ es convexa.

Con toda esta información procedemos a hacer el gráfico aproximado.



3) $y = 2 - \sqrt[3]{x-3}$

a) Dominio $\mathbb{R}$

b) Ceros $2 - \sqrt[3]{x-3} = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x-3} = 2 \therefore x_1 = 11$

c) Intersección con el eje y $\quad f(0) = 2 - \sqrt[3]{0-3} = 3{,}44$

d) Paridad $f(-x) = 2 - \sqrt[3]{-x-3} \neq f(x) \wedge \neq -f(x) \Rightarrow f$ no tiene paridad

e) Asíntotas

i) Vertical: no tiene

ii) Horizontal u oblicua

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{2-\sqrt[3]{x-3}}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x} - \sqrt[3]{\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^3}}\right) = 0,$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(2 - \sqrt[3]{x-3} - 0.x\right) = \infty$$

por lo tanto no tiene asíntotas no horizontal ni oblicua.

f) Extremos

T.1: $y' = \dfrac{-1}{3.\sqrt[3]{(x-3)^2}} = 0 \Rightarrow$ no hay extremos.

T.2: $x = 3$, y' a derecha es < 0 e y' a izquierda es < 0

$\Rightarrow$ no es extremo.

T.3: no hay.

g) Intervalos de crecimiento

$y' > 0 \therefore y' = \dfrac{-1}{3.\sqrt[3]{(x-3)^2}} > 0 \Rightarrow f$ nunca es creciente

$y' < 0 \therefore y' = \dfrac{-1}{3.\sqrt[3]{(x-3)^2}} < 0$, esto se verifica $\forall x \neq 3$.

En $x = 3$ f es decreciente por serlo a izquierda y a derecha, por lo tanto f es decreciente $\forall x \in \Re$.

h) Puntos de inflexión

T.1.: $y'' = \dfrac{2}{9.\sqrt[3]{(x-3)^5}} = 0 \Rightarrow$ no hay P.I.

T.2.: $x = 3$, y'' a derecha es > 0 e y'' a izquierda es $< 0 \Rightarrow$ P.I $= (3;2)$

i) Intervalos de concavidad

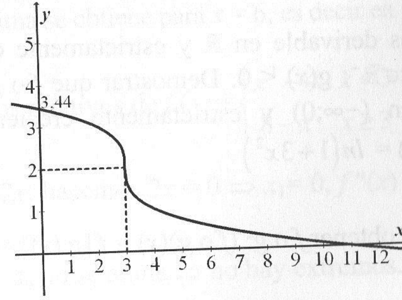
$y'' > 0 \Rightarrow y'' = \dfrac{2}{9.\sqrt[3]{(x-3)^5}} > 0 \therefore x-3 > 0 \Rightarrow x > 3$

la curva es cóncava en $(3;+\infty)$.

$y'' < 0 \Rightarrow y'' = \dfrac{2}{9.\sqrt[3]{(x-3)^5}} < 0 \therefore x-3 < 0 \Rightarrow x < 3$

la curva es convexa en $(-\infty;3)$.

Con toda esta información procedemos a hacer el gráfico aproximado.



EJERCICIOS GENERALES DE APLICACIÓN RESUELTOS

1) Hallar el número en el intervalo $[0;1]$ tal que la diferencia entre el número y su cuadrado sea máxima.

Primero expresamos la función: $y = x - x^2$. Debemos ahora buscar los puntos críticos:

T.1.: $y' = 1-2x,\ 1-2x = 0 \Rightarrow x_1 = 0{,}5$.
$y'' = -2 < 0 \Rightarrow$ en $x_1 = 0{,}5$ hay un máximo $(0{,}5;0{,}25)$.

T.2.: no hay

T.3.: $x_2 = 0$ y $x_3 = 1$ que son los extremos del intervalo. $f(0) = 0, f(1) = 0$.
La función alcanza su mínimo valor en $x_2 = 0$ y $x_3 = 1$.

Por lo tanto la respuesta es $x_1 = 0{,}5$.

2) Si $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, determinar a, b y c reales tales que $(1;2)$ sea un punto de inflexión de f, y que la pendiente de la recta tangente en dicho punto sea -2.

Debemos establecer una ecuación por cada condición.
$(1;2) \in f \Rightarrow a + b + c = 2$
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow f'(1) = 3a + 2b + c$
$3a + 2b + c = -2$
$f''(x) = 6ax + 2b,\ f''(1) = 0 \Rightarrow 6a + 2b = 0$

De la resolución del sistema surge que: $a = 4,\ b = -12,\ c = 10$.

3) Si g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es derivable en $\mathbb{R}$ y estrictamente creciente, $\forall x \in \mathbb{R}^+$: $g(x) > 0$ y $\forall x \in \mathbb{R}^-$: $g(x) < 0$. Demostrar que $f \circ g$ es estrictamente decreciente en $(-\infty;0)$ y estrictamente creciente en $(0;+\infty)$ si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = ln\left(1+3x^2\right)$.

Primero debemos obtener $f \circ g$: $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = ln\left[1+3g^2(x)\right]$.

Por ser g y f derivables, $f \circ g$ también lo es.

Calculamos $(f \circ g)' = \dfrac{6.g(x).\,g'(x)}{1+3\left[g(x)\right]^2}$.

a) $\dfrac{6.g(x).\,g'(x)}{1+3\left[g(x)\right]^2} > 0 \Rightarrow g(x).\,g'(x) > 0 \Rightarrow g(x) > 0 \therefore x > 0$

por lo tanto $f \circ g$ crece en $(0;+\infty)$.

b) $\dfrac{6.g(x).\,g'(x)}{1+3\left[g(x)\right]^2} < 0 \Rightarrow g(x).\,g'(x) < 0 \Rightarrow g(x) < 0 \therefore x < 0$

por lo tanto $f \circ g$ decrece en $(-\infty;0)$.

4) Hallar los puntos de la curva representativa de la función $h(x) = e^{2x+1}.\left(x^2 - 7x + \dfrac{1}{2}\right)$ donde la pendiente de la recta tangente al gráfico de la misma es mínima.

$h'(x) = 2.e^{2x+1}.\left(x^2 - 7x + \dfrac{1}{2}\right) + e^{2x+1}.(2x-7) = e^{2x+1}.\left(2x^2 - 12x - 6\right)$,

debemos buscar el mínimo

$h''(x) = 2.e^{2x+1}.\left(2x^2 - 12x - 6\right) + e^{2x+1}.(4x-12) = e^{2x+1}.\left(4x^2 - 20x - 24\right)$

$x^2 - 5x - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 6,\ x_2 = -1$

$h'''(x) = 2\,e^{2x+1}.\left(4x^2 - 20x - 24\right) + e^{2x+1}.(8x - 20) =$

$= e^{2x+1}.\left(8x^2 - 32x - 68\right)$

$h'''(6) = 28.e^{13} > 0 \Rightarrow$ en $x_1 = 6$ hay mín. rel.

$h'''(-1) = -28.e^{13} < 0 \Rightarrow$ en $x_2 = -1$ hay máx. rel.

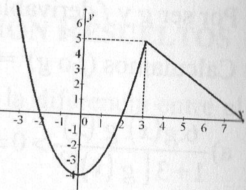
La pendiente mínima se obtiene para $x = 6$, es decir en $P = \left(6; -\dfrac{11}{2}; e^{13}\right)$.

5) Hallar extremos relativos de $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & x < 3 \\ 8 - x & x \geq 3 \end{cases}$. Graficar.

Si $x < 3$, $f'(x) = 2x$, hacemos $2x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$, $f''(x) = 2 > 0$, en $(0;-4)$ hay un mín. rel.

Si $x > 3$, $f'(x) = -1$, no se anula $\Rightarrow$ no hay extremos.

Si $x = 3$, $f'(3)^+ = 6$, $f'(3)^- = -1$, entonces en $x = 3$ f no es derivable. Analizamos el comportamiento de la derivada a izquierda y derecha. A izquierda $f' > 0$, a derecha $f' < 0$, por lo tanto en (3;5) f alcanza un máximo relativo.



6) Hallar extremos relativos de $f(x) = 3.\,|x| - x^{2/3}$

Debemos desdoblar la función, $f(x) = \begin{cases} -3x - x^{2/3} & x < 0 \\ 3x - x^{2/3} & x \geq 0 \end{cases}$

T.1.: $x < 0$, $f'(x) = -3 - \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}} = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{8}{729}$

$f''(x) = \dfrac{2}{9\sqrt[3]{x^4}} \Rightarrow f''(x_1) > 0$, por lo tanto en $\left(-\frac{8}{729}; -\frac{4}{243}\right)$ hay un mínimo relativo.

$x > 0$, $f'(x) = 3 - \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}} = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{8}{729}$, $f''(x_2) > 0$ por lo tanto en $\left(\frac{8}{729}; -\frac{4}{243}\right)$ hay un mínimo relativo.

T.2.: $x_3 = 0$, f no es derivable en x_3. Como $f'(0)^+ < 0$ y $f'(0)^- > 0$, en (0,0) hay un máximo relativo.

7) Hallar el punto perteneciente a la curva representativa de $y^2 = 2x$ que se encuentra más próximo al punto (1;4).

Se trata de hacer mínima la distancia entre P = $(x;y)$ perteneciente a la parábola y el punto $P_0 = (1;4)$.

Resulta $d = \sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2}$, como P = $(x;y)$ pertenece a la parábola, verifica: $x = \dfrac{y^2}{2}$, reemplazando se tiene:

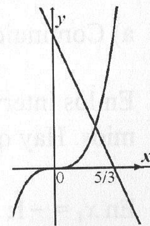
$d = \sqrt{\left(\dfrac{y^2}{2} - 1\right)^2 + (y-4)^2}$, derivando e igualando a cero:

$$d' = \frac{2\left(\dfrac{y^2}{2} - 1\right)y + 2(y-4)}{2\sqrt{\left(\dfrac{y^2}{2} - 1\right)^2 + (y-4)^2}} = \frac{y^3 - 8}{2\sqrt{\left(\dfrac{y^2}{2} - 1\right)^2 + (y-4)^2}} = 0 \Rightarrow y^3 = 8$$

por lo tanto el punto crítico es P = (2;2).

Si analizamos el signo de d' a izquierda y a derecha de $y = 2$, vemos que a derecha es mayor que cero y que a izquierda es menor que cero, por lo tanto se verifica que en P = (2;2) hay un mínimo relativo.

8) Probar que la ecuación $x^3 + 3x - 5 = 0$ tiene una única raíz real. Igualando en forma gráfica $x^3 = -3x + 5$, se observa que la raíz se encuentra en el intervalo [0;2].



a) Existencia de la raíz

Considerando $f(x) = x^3 + 3x - 5$ en [0;2] se cumple la hipótesis del teorema de Bolzano. La función es continua en reales por ser polinómica y además $f(0) = -5 < 0$ y $f(2) = 9 > 0$. Luego $\exists c \in (0;2) / f(c) = 0$.

b) Unicidad de la raíz

b_1) si se demuestra que la función es inyectiva en el intervalo considerado, se está probando la unicidad de la raíz.

Para probar la inyectividad: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^3 + 3x_1 - 5 = x_2^3 + 3x_2 - 5$ factoreando se tiene:

$x_1^3 - x_2^3 + 3(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow (x_1 - x_2).(x_1^2 + x_1.x_2 + x_2^2 + 3) = 0$. Para los valores de x del intervalo (0;2) el segundo factor del primer miembro es positivo, luego necesariamente es $x_1 - x_2 = 0$ y finalmente resulta $x_1 = x_2$.

b_1) otra forma de probar la unicidad es demostrando que la gráfica de la función *f* es monótona en el intervalo considerado:

$f'(x)=3x^2+3>0\ \forall x\in\mathbb{R}$, por lo tanto la función es monótona estrictamente creciente.

9) Dada la función $f(x)=\begin{cases} -12x-1 & x\leq -1 \\ x^3+3x^2-9x & -1<x<2 \\ 15x-28 & x\geq 2 \end{cases}$

a) Estudiar su derivabilidad en reales y hallar su función derivada.
b) Analizar la existencia de extremos relativos de *f* en reales.

a) Continuidad en $\mathbb{R}$

En los intervalos $(-\infty;-1)$, $(-1;2)$ y $(2;+\infty)$ es continua por ser polinomios. Hay que analizar la continuidad en $x_1=-1$ y $x_2=2$.

En $x_1=-1$: $\lim\limits_{x\to -1^-}(-12x-1)=11$ $\quad\lim\limits_{x\to -1^+}\left(x^3+3x^2-9x\right)=11$

y $f(-1)=11$. Por lo tanto *f* es continua en $x_1=-1$.

En $x_2=2$: $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(x^3+3x^2-9x\right)=2$ $\quad\lim\limits_{x\to 2^+}(15x-28)=2$

y $f(2)=2$. Por lo tanto *f* es continua en $x_2=2$.

Por lo tanto la función es continua en $\mathbb{R}$.

b) Derivabilidad en $\mathbb{R}$

Se plantean las derivadas laterales por definición en $x_1=-1$ y $x_2=2$

$$f'(-1)^- = \lim_{x\to -1^-}\frac{-12x-1-11}{x+1}=\lim_{x\to -1^-}\frac{-12x-12}{x+1}=\lim_{x\to -1^-}\frac{-12(x+1)}{x+1}=-12$$

$$f'(-1)^+ = \lim_{x\to -1^+}\frac{x^3+3x^2-9x-11}{x+1}=\lim_{x\to -1^+}\frac{\left(x^2+2x-11\right).(x+1)}{x+1}=-12$$

$f'(-1)^-=f'(-1)^+$, por lo tanto *f* es derivable en $x_1=-1$

$$f'(2)^- = \lim_{x\to 2^-}\frac{x^3+3x^2-9x-2}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{\left(x^2+5x+1\right)(x-2)}{x-2}=15$$

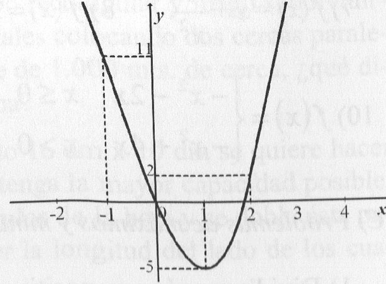
$$f'(2)^+ = \lim_{x\to 2^+}\frac{15x-28-2}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{15.(x-2)}{x-2}=15.$$

$f'(2)^-=f'(2)^+$, por lo tanto *f* es derivable en $x=2$.

Luego la función derivada está dada por:

$$f'(x)=\begin{cases} -12 & x\leq -1 \\ 3x^2+6x-9 & -1<x<2 \\ 15 & x\geq 2 \end{cases}$$

Para estudiar la existencia de extremos considerados el único tramo en el que puede anularse, esto es: $3x^2+6x-9=0$. Las raíces de la ecuación son $x_1=-3$ y $x_2=1$. La primera no corresponde al tramo considerado, por tanto el punto crítico es $x=1$. A izquierda del punto crítico la derivada primera es negativa y a la derecha es positiva, luego en $(1;-5)$ hay un mínimo relativo.



EJERCICIOS PROPUESTOS

A) Obtener intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones

1) $f(x)=x^2-4x-1$ 2) $f(x)=x^3-x^2-x$ 3) $f(x)=2x^3-9x^2+2$

4) $f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$ 5) $f(x)=\begin{cases} 2-(x+1)^3 & x<0 \\ \dfrac{2x+1}{x+1} & x\geq 0 \end{cases}$ 6) $f(x)=e^{-x^2}$

7) Dada la función f definida por: $f(x)=\dfrac{mx-1}{x-m}$, hallar $m\in\Re$ para que sea estrictamente creciente $\forall x\in\mathbb{R}$.

B) Obtener máximos y mínimos relativos de las siguientes funciones

1) $f(x)=x^3-3x+2$ 2) $f(x)=x^3-3x^2+4$ 3) $f(x)=-x^3+3x^2-2$

4) $y=x.e^x$ 5) $f(x)=x.\sqrt{8-x^2}$ 6) $f(x)=\begin{cases} -x^2+1 & x\leq 1 \\ |x-1|^3 & x>1 \end{cases}$

7) $f(x)=x+\dfrac{1}{x^2}$ 8) $f(x)=2^{x^3+\frac{5}{2}x^2-2x-1}$ 9) $f(x)=\begin{cases} 2x+9 & x\leq -2 \\ x^2+1 & x>-2 \end{cases}$

10) $f(x)=\begin{cases} -x^2-2x & x\leq 0 \\ -x^2+4x & x>0 \end{cases}$ 11) $f(x)=\begin{cases} -x^2+4 & x\leq 2 \\ \dfrac{x-2}{x-1} & x>2 \end{cases}$

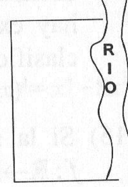
C) Problemas de máximos y mínimos

1) Dividir un número positivo ***a*** en dos sumandos tales que su producto sea máximo.

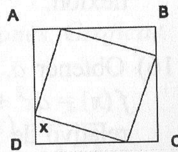
2) Torcer un alambre de longitud ***a*** de modo que forme un rectángulo de área máxima.

3) Un lote rectangular de 800m^2 tiene un lado sobre un río. Hallar las dimensiones del lote para que la longitud de la cerca sea mínima.

4) Con una hoja de cartón cuadrada de lado 72 cm es preciso hacer una caja rectangular abierta que tenga la mayor capacidad posible. Se recortan cuadrados de los ángulos de la hoja y se dobla ésta para formar la caja. ¿Cuál debe ser la longitud del lado de los cuadrados cortados?



5) Se desea alambrar un campo rectangular limitado por un río como indica la figura. Si la longitud del alambre es de 1.500 mts., determinar las dimensiones del terreno para que la superficie encerrada sea máxima.



6) Determinar x de tal manera que el cuadrado inscripto sea de área mínima, si el lado del cuadrado ABCD es de 10 m.

7) Una escuela necesita aulas rectangulares de 16m^2 de superficie. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del aula para gastar la menor cantidad posible de material?

8) Se dispone de 36 mts. de cerca para encerrar un terreno rectangular. ¿Cuáles deben ser las dimensiones para que sea de superficie máxima?

9) ¿Para qué número se verifica que es máximo el producto entre un número y el anterior?

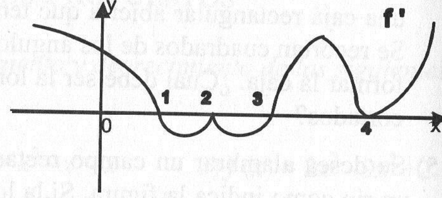
10) Un hombre desea cercar un campo rectangular y luego subdividirlo en 3 parcelas rectangulares iguales colocando dos cercas paralelas a uno de los lados. Si dispone de 1.000 mts. de cerca, ¿qué dimensiones le darán el área máxima?

11) Con una hoja de cartulina de lado 16 dm x 10 dm se quiere hacer una caja rectangular abierta que tenga la mayor capacidad posible. Se recortan cuadrados de los ángulos de la hoja y se dobla ésta para formar la caja. ¿Cuál debe ser la longitud del lado de los cuadrados cortados?

12) Obtener a y b de manera tal que $f(x)=x^3+ax^2+b$ tenga un extremo relativo en (2;3).

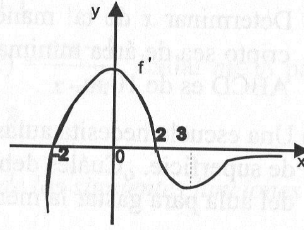
13) ¿Qué condición deben cumplir a y b reales para que la función $f(x)=ax+b\cos x$ tenga extremos relativos en el intervalo $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$?

14) Si la siguiente gráfica corresponde a la derivada de la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, determinar en qué puntos hay extremos relativos y clasificarlos.



15) Si la siguiente gráfica corresponde a la derivada de la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, determinar los intervalos de crecimiento y los puntos de inflexión.

16) Obtener a, b y c de manera tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$ tenga un máximo relativo de 7 en $x_0=1$ y que la gráfica de $f(x)$ pase por $(2;-2)$.



17) Dada $f(x) = ax^3 + bx^2$ hallar a y b para que tenga un P.I. en $(1;2)$.

18) Demostrar que una función cúbica cuya ecuación es $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ con a, b, c y $d \neq 0$, tiene un solo punto de inflexión.

19) La función $f(x) = x^3 + 2x^2 + ax + b$ presenta un máximo relativo en $(-1;6)$. Hallar a y b y determinar si existe algún otro extremo relativo y clasificarlo.

20) Demostrar que $\forall a > 0, f(x) = ln\,(ax^3 + x)$ no tiene extremos relativos.

21) Hallar el área del rectángulo de mayor área que puede inscribirse en un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 3 y 4, si dos de los lados del rectángulo están sobre los catetos.

22) ¿Qué dimensiones debe tener un depósito de lata de 500 litros, abierto en su parte superior, de base cuadrada, para que su costo sea el menor posible?

23) ¿Qué dimensiones debe tener un depósito de lata que utilice 108 dm^2 de material, abierto en su parte superior, de base cuadrada, para que su capacidad sea la mayor posible? Dar el volumen.

24) Determinar el o los puntos sobre la gráfica de $f(x) = 4 - x^2$ más cercanos al punto $P = (0;2)$. Calcular la distancia. Graficar.

D) Obtener intervalos de concavidad y convexidad, hallar puntos de inflexión.

1) $f(x) = x^3 + 9x$ 2) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ 3) $f(x) = x^4 - 8x^3$

4) $f(x) = \dfrac{2}{x^2+3}$ 5) $f(x) = 2\,sen\,(3x)$ en $[-\pi;\pi]$

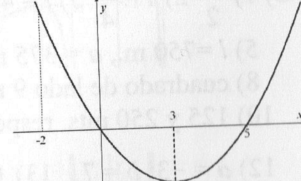
E) Efectuar el estudio completo de las siguientes funciones. Graficar.

1) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ 2) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$ 3) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

4) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$ 5) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ 6) $f(x) = x + \dfrac{3}{2}x^{2/3}$

7) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{4-x}$ 8) $f(x) = +\sqrt{x^3 - 3x}$

F) Si $f: [-2;5] \to \mathbb{R}$ es la función continua y derivable del gráfico, encontrar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función h si: $h: [-2;5] \to \mathbb{R} \,/\, h(x) = f(x) - e^{f(x)}$



G) Encontrar las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de $f(x) = \dfrac{x^4 - 6x^2 + 4}{8}$ en sus puntos de inflexión.

RESPUESTAS

A) 1) crece: $(2;+\infty)$, decrece: $(-\infty;2)$

2) crece: $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right] \cup (1;+\infty)$, decrece: $\left(-\frac{1}{3};1\right)$

3) crece: $(-\infty;0) \cup (3;+\infty)$, decrece: $(0;3)$

4) crece: $(0;1)$, decrece: $(1;+\infty)$ 5) crece: $(0;+\infty)$, decrece $(-\infty;0)$

6) crece: $(-\infty;0)$, decrece $(0;+\infty)$ 7) $|m|<1$

B) 1) máx.: $(-1;4)$, mín.: $(1;0)$; 2) máx.: $(0;4)$, mín.: $(2;0)$

3) máx.: $(2;2)$, mín.: $(0;-2)$; 4) mín.: $(-1;-e^{-1})$

5) máx.: $(2;4)$, mín.: $(-2;-4)$; 6) máx.: $(0;1)$, mín.: $(1;0)$

7) mín.: $\left(\sqrt[3]{2};\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}\right)$; 8) máx.: $(-2;32)$, mín.: $\left(\frac{1}{3};2^{-73/54}\right)$

9) máx.: $(-2;5)$, mín.: $(0;1)$ 10) mín. $(0;0)$, máx. $(-1;1)$ y $(2;4)$

11) mín. $(2;0)$, máx. $(0;2)$

C) 1) $\frac{a}{2}$ 2) $l=\frac{a}{4}$ 3) $l=40$ m., $a=20$ m. 4) $l=12$ cm.

5) $l=750$ m., $a=375$ m. 6) $x=5$ m. 7) cuadrados de 4 m. de lado

8) cuadrado de lado 9 m. 9) no tiene solución

10) 125 y 250 mts. respectivamente 11) 2 dm, $V=144$ dm^3.

12) $a=-3$; $b=7$ 13) $0\leq\frac{a}{b}\leq1$ 14) en $x=1$ máx. y $x=3$ mín.

15) $(-2;2)$ crec., $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$ decrec., PI en $x_1=0$ y $x_2=3$

16) $a=-9$, $b=18$, $c=-2$; 17) $a=-1$, $b=3$

19) $a=1$, $b=6$, $x=-1/3$ mín. rel. 21) $x=3/2$, $y=2$, área máxima = 3

22) base: 10 dm., h: 5 dm. 23) base: 6 dm., h: 3 dm. V = 108 dm^3.

24) $P_0=\left(\sqrt{3};1\right)$, $P_1=\left(-\sqrt{3};1\right)$, d = 2.

D) 1) P.I.= $(0;0)$; $(-\infty;0)$ conv., $(0;+\infty)$ conc.

2) P.I.= $\left(-\frac{1}{2};\frac{15}{2}\right)$; $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$ conv., $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$ conc.

3) P.I.= $(0;0)$, $(4;-256)$; $(0;4)$ conv., $(-\infty;0)\cup(4;+\infty)$ conc.

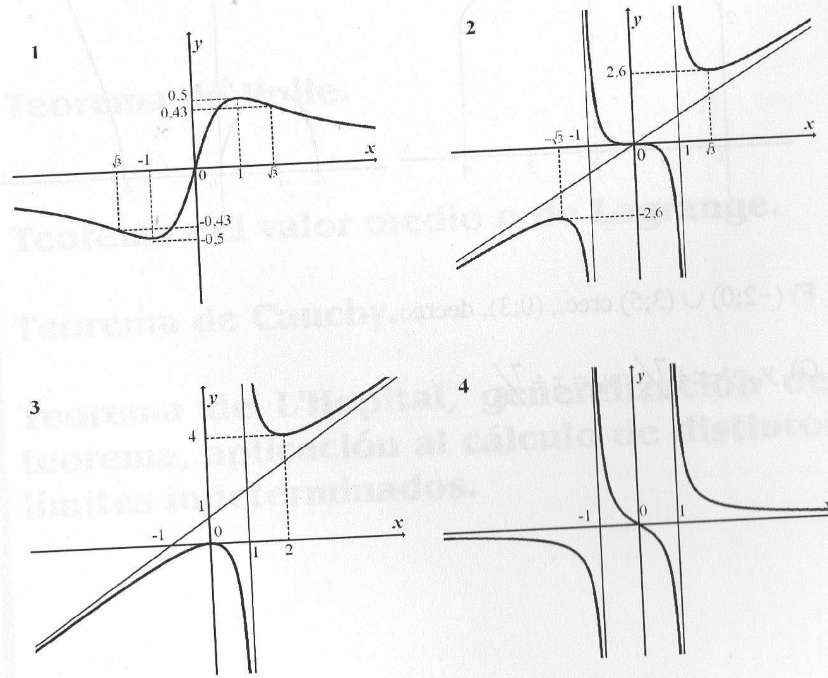
4) P.I.= $\left(1;\frac{1}{2}\right)$, $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$; $(-1;1)$ conv., $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$ conc.

5) P.I.= $\left(-\frac{2}{3};\pi;0\right)$, $\left(-\frac{1}{3};\pi;0\right)$, $(0;0)$, $\left(\frac{2}{3}\pi;0\right)$, $\left(\frac{1}{3}\pi;0\right)$;

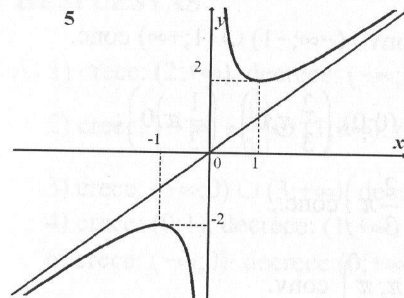
$\left(-\pi;-\frac{2}{3}\pi\right)$, $\left(-\frac{1}{3}\pi;0\right)$, $\left(\frac{1}{3}\pi;\frac{2}{3}\pi\right)$ conc.,

$\left(-\frac{2}{3}\pi;-\frac{1}{3}\pi\right)$, $\left(0;-\frac{1}{3}\pi\right)$, $\left(\frac{2}{3}\pi;\pi\right)$ conv.

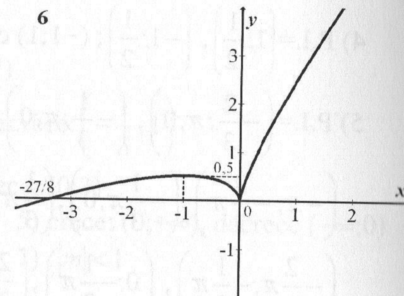
E)



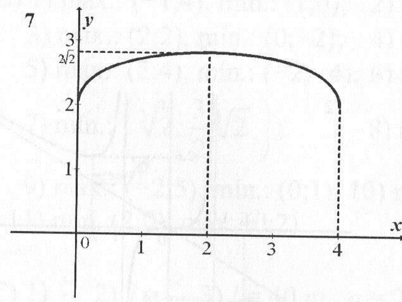
5



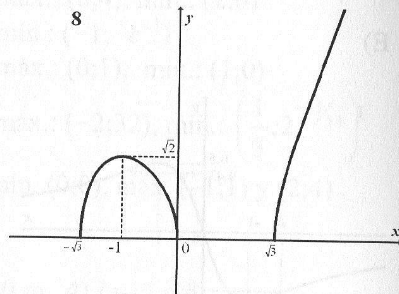
6



7



8



F) $(-2;0) \cup (3;5)$ crec., $(0;3)$, decrec.

G) $y_t = -x + \frac{7}{8}$; $y_t = x + \frac{7}{8}$

Capítulo 8

Teoremas de las funciones derivables

Teorema de Rolle.

Teorema del valor medio o de Lagrange.

Teorema de Cauchy.

Teorema de L'Hopital, generalización del teorema, aplicación al cálculo de distintos límites indeterminados.

TEOREMAS DE LAS FUNCIONES DERIVABLES

TEOREMA DE ROLLE

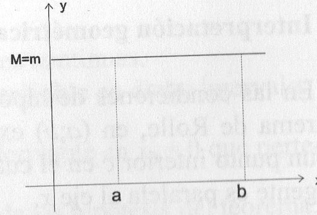
ROLLE, ***Michel*** ***(1652-1719):*** matemático francés que se ocupó de la resolución de ecuaciones de las que obtuvo una serie de polinomios de grado decreciente. Demuestra su famoso teorema como un método para buscar raíces de polinomios.

Si una función es continua en el intervalo [a;b] y derivable en el (a;b) y f (a) = f (b) entonces existe un punto interior c ∈ (a;b) en el cual f '(c)=0.

Demostración: la función por ser continua alcanza un máximo **M** y un mínimo **m** absolutos en [*a*;*b*] (por propiedad de las funciones continuas).

Se presentan los siguientes casos:

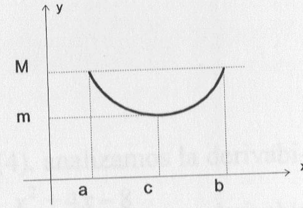
1) **m = M**, entonces *f* es una función constante en [*a*;*b*] y por lo tanto existen infinitos puntos *c*. La derivada se anula $\forall x \in [a;b]$.



2) Si **m ≠ M**, uno de los valores es $\neq f(a)$.

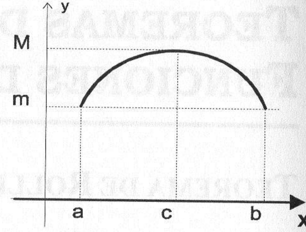
Se presentan 3 casos:

a) **m ≠ *f* (*a*) y M = *f* (*a*)**



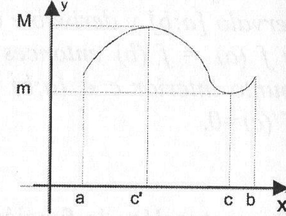
m es mín. absoluto e interior al intervalo, por lo tanto también es mín. relativo entonces $\exists c \,/\, f'(c)=0$, $x = c$ es el punto donde la función alcanza el mínimo absoluto.

b) **M ≠ $f(a)$ y m = $f(a)$**



M es máx. absoluto e interior al intervalo, por lo tanto también es máx. relativo, entonces $\exists c \,/\, f'(c)=0$, $x = c$ es el punto donde la función alcanza el máximo absoluto.

c) **m ≠ $f(a)$ y M ≠ $f(a)$**

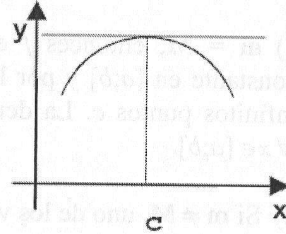


f alcanza un mínimo en $x = c$ y un máximo en $x = c'$ que por ser interiores a $[a;b]$ son extremos relativos, por lo tanto existen dos puntos en los cuales la derivada se anula.

En todos los casos vemos que existe por lo menos un punto $x = c$ interior al intervalo $(a;b)$ en el cual la derivada se anula.

Interpretación geométrica

En las condiciones de hipótesis del Teorema de Rolle, en $(a;b)$ existe al menos un punto interior c en el cual la recta tangente es paralela al eje x.



EJERCICIOS DE APLICACIÓN RESUELTOS

1) Hallar c perteneciente a los intervalos indicados que cumpla con el teorema de Rolle si se verifican las hipótesis del mismo.

a) $f(x) = x^3 - 12x$ en $\left[0;2\sqrt{3}\right]$

Debemos verificar si cumple con las hipótesis: $f(0) = 0$, $f\left(2\sqrt{3}\right) = 0$, además f es derivable y continua por ser una función polinómica.

$f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow 3c^2 - 12 = 0 \Rightarrow c^2 = 4 \Rightarrow c = 2 \in \left(0;2\sqrt{3}\right)$

b) $f(x) = x^2 - 3x + 2$ en $[1;2]$

f es derivable y continua por ser un polinomio, además $f(1) = f(2) = 0$.
$f'(x) = 2x - 3 \Rightarrow 2c - 3 = 0 \Rightarrow \exists c \,/\, f'(c)=0$. $c = \frac{3}{2} \in (1;2)$

c) $f(x) = 1 - \sqrt[5]{x^4}$ en $[-1;1]$

f es continua en $\mathbb{R}$ por ser resta de funciones continuas.
$f(-1) = 0 = f(1)$, debemos verificar si es derivable en dicho intervalo:
$f'(x) = -\frac{4}{5}x^{-\frac{1}{5}} = -\frac{4}{5\sqrt[5]{x}}$ vemos que no es derivable en $x_0 = 0$ que pertenece a $(-1;1)$, por lo tanto no verifica una de las hipótesis del teorema.

d) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x}{x+2}$ en $[0;4]$

f es continua $\forall x \neq -2 \notin (0;4)$. $f(0) = 0 = f(4)$, analizamos la derivabilidad: $f'(x) = \dfrac{(2x-4).(x+2) - \left(x^2 - 4x\right).1}{(x+2)^2} = \dfrac{x^2 + 4x - 8}{(x+2)^2} \Rightarrow$ es derivable en $(0;4)$, sólo no lo es en $x_0 = -2 \notin (0;4)$.
$c^2 + 4c - 8 = 0 \Rightarrow c = 1{,}46 \in (0;4)$.

e) $f(x)=\sqrt[3]{(x-2)^2}$ en $[0;4]$

f es continua en $\Re$, $f(0)=\sqrt[3]{4}=f(4)$, analizamos la derivabilidad:

$f'(x)=\dfrac{2}{3.\sqrt[3]{x-2}}$ entonces no es derivable en $(0;4)$, ya que no lo es en $x_0=2\in(0;4)$. Por lo tanto no se verifica una de las hipótesis del teorema.

f) $f(x)=|x-1|$ en $[0;2]$

Desarrollamos la función: $f(x)=\begin{cases}-x+1 & 0\le x<1\\ x-1 & 1\le x\le 2\end{cases}$,

Verificamos la continuidad. El punto a analizar es $x_0=1$.

$f(1)=0$.

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)=0$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(-x+1)=0$. Por lo tanto f es continua en $x_0=1$. Además $f(0)=f(2)=1$.

Analizamos derivabilidad en $x_0=1$. Debemos calcular las derivadas laterales aplicando la definición.

$f'(1)^+=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1}{x-1}=1$ $\qquad f'(1)^-=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-x+1}{x-1}=-1$

Vemos que f no es derivable en $x_0=1$. No se cumple una de las hipótesis.

2) Dada $h(x)=x^3-9x+1$ que cumple con las hipótesis del Teorema de Rolle en $[0;b]$, hallar b y el punto c que verifica el teorema.

$h(0)=h(b)\Rightarrow 1=b^3-9b+1$. $\quad b^3-9b=0$ por lo tanto $b=3$.

$h'(x)=3x^2-9=0 \Rightarrow c^2=3$, por lo tanto $c=\sqrt{3}\in(0;3)$.

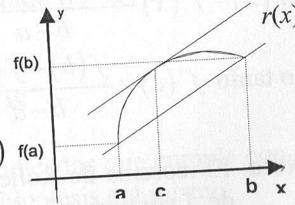
TEOREMA DEL VALOR MEDIO O DE LAGRANGE

Si f es una función continua en el intervalo $[a;b]$ y derivable en el intervalo $(a;b)$ entonces existe un punto $c\in(a;b)$ en el que se verifica que: $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Demostración

Consideramos una función auxiliar lineal r que pasa por $[a;f(a)]$ y $[b;f(b)]$:

$$r(x)-f(a)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$



$$r(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}a+f(a)$$

$$\Rightarrow r'(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



LAGRANGE, *Joseph Louis* (1736-1813): uno de los matemáticos más notables de todos los tiempos. Nació en Turín y murió en París. Su padre perdió una fortuna y lo obligó a trabajar. Su obra más importante fue la Mecanique Analytique (1788). Napoleón lo condecoró y le llamó *la pirámide excelsa de las ciencias matemáticas*; lo nombró senador y lo elevó a la dignidad de conde. Reemplaza a Euler en la Academia de Ciencias de Berlín convocado por Federico II, cuando sólo tenía 22 años y le dice: *donde estoy yo, el más importante rey de Europa, debe estar usted, el más grande matemático*. En 1787, muerto Federico II, se traslada a París donde participa de la formación de la Escuela Politécnica. Aplica el análisis a la física.

Ahora tomamos otra función auxiliar $h(x) = f(x) - r(x)$ que es derivable y continua en $(a;b)$ por ser resta de dos funciones derivables y continuas. Su derivada $h'(x) = f'(x) - r'(x)$.

Además la función $h(x) = f(x) - r(x)$ vemos que toma valores iguales en $x = a$ y $x = b$: $h(a) = h(b) = 0$ porque $f(x)$ y $r(x)$ toman los mismos valores en $x = b$ y $x = a$.

Por lo tanto la función $h(x)$ cumple con las hipótesis del Teorema de Rolle, por lo tanto $\exists c / h'(c) = 0$.

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \Rightarrow h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = 0, \text{ por}$$

lo tanto $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$.

Nota: El teorema de Rolle se puede considerar un caso particular del de Lagrange. Si f toma valores iguales en a y en b, queda $f'(c) = 0$, que es lo que dice el teorema de Rolle.

Interpretación geométrica: hay un punto interior al intervalo $(a;b)$ en el cual la recta tangente a la curva es paralela a la recta secante porque en ese punto f tiene la misma pendiente que la recta.

Consecuencias

1) Si $f: [a;b] \to \Re$ y $f'(x) = 0$, $\forall x \in (a;b)$, entonces f es constante en $[a;b]$.

Demostración

Consideramos el intervalo $[x_1;x_2] \subset [a;b]$, f siempre cumple las condiciones de la hipótesis del teorema de Lagrange en $[x_1;x_2]$.

Luego $\exists c \in (x_1;x_2) / f'(c) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0$, entonces $f(x_2) = f(x_1)$.

Como x_1 y x_2 son puntos cualesquiera del intervalo $[a;b]$ resulta:

$$\forall x \in (a;b): f(x) = k$$

2) Si f y g son derivables en $[a;b]$ y $f'(x) = g'(x)$ $\forall x \in (a;b)$, entonces f y g difieren en una constante.

Demostración

$\forall x$ del intervalo se verifica que $f'(x) - g'(x) = 0$, o sea $(f - g)'(x) = 0$.

Por consecuencia 1) en el intervalo considerado $(f - g)$ es constante y entonces $f(x) - g(x) = k$.

EJERCICIOS DE APLICACIÓN RESUELTOS

1) Hallar c perteneciente a los intervalos indicados que cumpla con el teorema de Lagrange si se verifican las hipótesis del mismo.

a) $f(x) = x^2$ en $[0;3]$

La función es derivable y continua por ser un polinomio. Verificado el cumplimiento de las hipótesis procedemos a calcular el punto c.

$$f'(x) = 2x \Rightarrow 2c = \frac{9-0}{3} = 3 \Rightarrow c = \frac{3}{2} \in (0;3)$$

b) $f(x) = x - x^3$ en $[-2;1]$

La función es derivable y continua por ser un polinomio. Verificado el cumplimiento de las hipótesis procedemos a calcular el punto c.

$f'(x) = 1 - 3x^2 \Rightarrow 1 - 3c^2 = \dfrac{0-6}{3} = -2 \Rightarrow c^2 = 1 \Rightarrow c = -1$ (no se considera $c = 1$ porque $\notin (-2;1)$).

c) $f(x) = \begin{cases} x & 0 < x \leq 1 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ en [0;1]

Vemos que la función no es continua en $x_0 = 0$ porque $f(0) = 1$ y el $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0$. Por lo tanto no verifica una de las hipótesis del teorema.

d) $f(x) = \ln x$ en $[1;e]$

La función logaritmo sabemos que es derivable y continua, buscamos el punto c.

$$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{c} = \frac{1-0}{e-1} = \frac{1}{e-1} \Rightarrow c = e-1 = 1{,}72 \in (1;e)$$

2) Demostrar que si f es una función cuadrática definida por: $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, $A \neq 0$, el número c del teorema del valor medio es el punto medio del intervalo $[a;b]$.

$$f'(x) = 2Ax + B \Rightarrow 2Ac + B = \frac{Ab^2 + Bb + C - Aa^2 - Ba - C}{b-a} =$$

$$= \frac{A.(b^2 - a^2) + B.(b-a)}{b-a} = A.(b+a) + B \quad \therefore \quad c = \frac{b+a}{2}$$

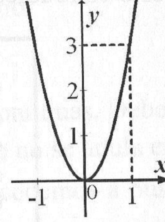
3) Probar, utilizando el teorema del valor medio, que si f es derivable en $[a;b]$ y $\forall x \in [a;b]$: $f'(c) > 0$ entonces f es estrictamente creciente en dicho intervalo.

Es posible aplicar el Teorema de Lagrange en $[x_1;x_2] \subset [a;b]$:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) \text{ donde } x_1 < c < x_2$$

Como por hipótesis $f'(c) > 0 \Rightarrow sg\,[f(x_2) - f(x_1)] = sg\,(x_2 - x_1)$, por lo tanto la función es estrictamente creciente.

4) Verificar si $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & x \leq 1 \\ x^3 + 3x - 1 & x > 1 \end{cases}$ cumple con las hipótesis del teorema de Lagrange en [0;3].



En [0;1) y (1;3] la función es continua y derivable por ser funciones polinómicas. Debemos analizar continuidad y derivabilidad en $x_0 = 1$.

Verificamos la continuidad. $f(1) = 3$.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x^3 + 3x - 1) = 3, \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 3x^2 = 3.$$

Por lo tanto f es continua en $x_0 = 1$.

Analizamos derivabilidad. Debemos calcular las derivadas laterales aplicando la definición.

$$f'(1)^+ = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^3 + 3x - 1 - 3}{x-1} = 6 \qquad f'(1)^- = \lim_{x\to 1^-} \frac{3x^2 - 3}{x-1} = 6$$

Vemos que f es derivable en $x_0 = 1$.

f es continua y derivable en [0;3], por lo tanto verifica las hipótesis del teorema de Lagrange. Entonces existe c.

$$f'_x = 6x \Rightarrow 6c = \frac{35}{3} \therefore c = \frac{35}{18} \notin (0;1)$$

$$f'_x = 3x^2 + 3 \Rightarrow 3c^2 + 3 = \frac{35}{3} \therefore c = \frac{\sqrt{26}}{3} \in (1;3)$$

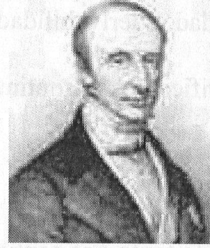
Teorema de Cauchy

Si f y g son funciones continuas en el $[a;b]$ y derivables en el $(a;b)$ y $\forall x \in (a;b)$: $g'(x) \neq 0$ entonces $\exists c \in (a;b)$ tal que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Obsérvese que no hace falta exigir que $g(b)-g(a)\neq 0$ porque si fuese así $g'(x)$ se anularía en algún punto del intervalo (Teorema de Rolle) y esto contradice la hipótesis.

CAUCHY, *Augustin Louis (1789-1867)*: matemático francés. Se destacan sus trabajos sobre el concepto de límite y sus contribuciones a la aritmetización del Análisis. Se lo considera el creador de la teoría de las funciones complejas. Deja su profesión de ingeniero para dedicarse por consejo de sus amigos Laplace y Lagrange a la matemática que enseñó en la *Escuela Politécnica de París*. Fue hombre de profundas convicciones religiosas, adicto a Carlos X. En 1830 se exilió voluntariamente a la subida al trono de Luis Felipe. Volvió a Francia en 1838.



Demostración: consideramos la función auxiliar $p(x)$.

$p(x)=[f(b)-f(a)].g(x)-[g(b)-g(a)].f(x)$ que es derivable y continua en $(a;b)$ por ser resta de funciones continuas y derivables y vemos que cumple con las hipótesis del Teorema de Rolle.

$p(a)=f(b).g(a)-g(b).f(a)$ y $p(b)=g(a).f(b)-f(a).g(b)$
$\Rightarrow \exists c\,/\,p'(c)=0$

$$p'(x)=[f(b)-f(a)].g'(x)-[g(b)-g(a)].f'(x)$$

$$\Rightarrow p'(c)=[f(b)-f(a)].g'(c)-[g(b)-g(a)].f'(c)=0$$

por lo tanto $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

Nota: Este teorema incluye al teorema del valor medio como caso particular si $g(x)=x$.

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\Rightarrow\frac{f'(c)}{1}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Ejercicios de Aplicación Resueltos

Hallar c perteneciente a los intervalos indicados que cumpla con el teorema de Cauchy si se verifican las hipótesis del mismo.

a) $f(x)=x^3-1 \quad g(x)=x^2+2$ en $[1;2]$

Por ser polinomios ambas funciones son derivables y continuas. Debemos ver que no se anula $g'(x)$ en $(1;2)$: $g'(x)=2x$, que no se anula en $(1;2)$. Verificado el cumplimiento de las hipótesis procedemos a buscar el punto c.

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{3x^2}{2x}\Rightarrow\frac{3c}{2}=\frac{7-0}{6-3}=\frac{7}{3}\therefore c=\frac{14}{9}$$

b) $f(x)=sen\,x \quad g(x)=cos\,x$ en $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

Ambas funciones son derivables y continuas, $g'(x)=-sen\,x$ no se anula en $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{cos\,x}{-sen\,x}\Rightarrow\frac{cos\,c}{-sen\,c}=\frac{1-0}{0-1}=-1\;\therefore -cotg\,c=-1.\;c=\frac{\pi}{4}\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$$

c) $f(x)=ln\,x \quad g(x)=x^2$ en $[2;4]$

Ambas funciones son derivables y continuas, $g'(x)=2x$ no se anula en $(2;4)$.

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{\frac{1}{x}}{2x}=\frac{1}{2x^2}\Rightarrow\frac{1}{2c^2}=\frac{ln\,4-ln\,2}{16-4}=0{,}057\therefore c^2=\frac{1}{0{,}114}$$

$\Rightarrow c=2{,}96\in(2;4)$.

d) $f(x)=x^3-2x^2 \quad g(x)=x^2-x$ en $[0;2]$

Ambas funciones son derivables y continuas por ser polinomios. Veamos si se anula $g'(x)$. $g'(x)=2x-1=0$ en $x=0{,}5\in(0;2)$, por lo tanto no se puede aplicar el teorema de Cauchy.

TEOREMA DE L'HOPITAL

Si f y g son funciones que cumplen con las hipótesis del teorema de Cauchy en un E(a;h),* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ *y* $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ *entonces:*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(siempre y cuando éste último exista)

L'HOPITAL, *Guillaume Francois (1661-1704)*: noble francés, era marqués, se dedicó a promover a los jóvenes estudiantes. Fue discípulo de Johann Bernoulli. Publica las conferencias de su maestro Bernoulli y le da de esta forma una gran difusión. De esta forma se publica por primera vez el método del cálculo de límites descubierto por Bernoulli y que injustamente lleva el nombre de L'Hopital.



Demostración: tomamos en el intervalo $[a;b]$ un punto $x \neq a$, aplicando el teorema de Cauchy:

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \text{ con } a<c<x$$

pero $f(a)$ y $g(a)$ son 0 por ser f y g continuas y sus límites ser 0, entonces:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)} \Rightarrow \lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Teniendo en cuenta que cuando $x \to a$, $c \to a$ por estar c comprendido entre a y x.

Análogamente, aplicando el teorema de Cauchy y tomando límite a izquierda de $x = a$, vemos que se verifica $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Ejemplos

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sen\,x}{ln(x+1)}\left(\frac{\to 0}{\to 0}\right) \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{sen\,x}{ln(x+1)} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0}\frac{cos\,x}{\frac{1}{x+1}}=\frac{1}{1}=1$

b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{cos\,x}{x-\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\to 0}{\to 0}\right) \Rightarrow \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{cos\,x}{x-\frac{\pi}{2}} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-sen\,x}{1}=-\frac{1}{1}=-1$

GENERALIZACIÓN DEL TEOREMA DE L'HOPITAL

Esta propiedad también es válida cuando:

a) $x \to \infty$:

Si $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}\left(\frac{\to 0}{\to 0}\right) \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Ejemplo $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{sen\,\frac{1}{x}}{\frac{2}{3x}}\left(\frac{\to 0}{\to 0}\right) \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to\infty}\frac{cos\,\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{2}{3x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3.cos\,\frac{1}{x}}{2}=\frac{3}{2}$

b) $x \to a$ ó $x \to \infty$ y los $lim \to \infty$:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\left(\frac{\to\infty}{\to\infty}\right) \Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}\left(\frac{\to\infty}{\to\infty}\right) \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Ejemplos

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3}{x+1} \left(\frac{\to\infty}{\to\infty}\right) \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3}{x+1} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{1} = \infty$

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x+x}{2e^x} \left(\frac{\to\infty}{\to\infty}\right) \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{e^x+x}{2e^x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x+1}{2e^x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2e^x} = \frac{1}{2}$

c)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln sen\, x}{\ln tg\, x} \left(\frac{\to -\infty}{\to -\infty}\right) \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln sen\, x}{\ln tg\, x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{sen\ x}.\cos x}{\frac{1}{tg\, x}.\frac{1}{sec^2 x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\cos^2 x} = 1$$

Aplicación de la regla de L'Hopital para otras indeterminaciones

A) *Producto de un infinitésimo por infinito* $(\to 0).(\to \infty)$

Se expresa el producto como cociente de infinitésimos o de infinitos y luego se aplica la regla de L'Hopital.

Ejemplos

a) $\lim_{x\to 0^+} (x.\ln x)(\to 0).(\to\infty) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \left(\frac{\to\infty}{\to\infty}\right) \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} (-x) = 0$

b)

$$\lim_{x\to\infty} \left(x.sen\frac{2}{x}\right)(\to 0).(\to\infty) = \lim_{x\to\infty} \frac{sen\frac{2}{x}}{\frac{1}{x}} \left(\frac{\to 0}{\to 0}\right) \overset{L'H}{=}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\cos\frac{2}{x}.\left(-\frac{2}{x^2}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} 2\cos\frac{2}{x} = 2$$

B) *Suma de infinitos de distinto signo*

Se transforma en un cociente de dos infinitésimos y luego se aplica la regla de L'Hopital

Ejemplos

a) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \cot g\, x\right) (\to +\infty) + (\to -\infty)$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \cot g\, x\right) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{sen\, x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{sen\, x - x.\cos x}{x.sen\, x} \left(\frac{\to 0}{\to 0}\right)$$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos x + x.sen\, x}{sen\, x + x.\cos x} \left(\frac{\to 0}{\to 0}\right) \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{sen\, x + x.\cos x}{\cos x + \cos x - x.sen\, x} = \frac{0}{2} = 0$$

b) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x}\right) (\to +\infty) + (\to -\infty)$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x - e^x + 1}{(e^x-1)x} \left(\frac{\to 0}{\to 0}\right) \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1-e^x}{e^x.x + e^x - 1} \left(\frac{\to 0}{\to 0}\right)$$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-e^x}{e^x.x + e^x + e^x} = -\frac{1}{2}$$

C) *Función potencial-exponencial cuando la base y el exponente son infinitésimos:* $(\to 0)^{(\to 0)}$

D) *Función potencial-exponencial cuando la base tiende a infinito y el exponente es un infinitésimo:* $(\to \infty)^{(\to 0)}$

E) *Función potencial-exponencial cuando la base tiende a 1 y el exponente tiende a infinito:* $(\to 1)^{(\to\infty)}$

Estos tres casos se resuelven de la misma forma. Primero se los lleva a la forma (→0).(→∞), aplicando logaritmos, luego a la forma $\frac{\to 0}{\to 0}$ o $\frac{\to \infty}{\to \infty}$.

Ejemplos

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x \quad (\to 0)^{(\to 0)}$, se toma $y = x^x \Rightarrow \ln y = x.\ln x$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} (x.\ln x)\ (\to 0).(\to \infty)$$

$$\lim_{x\to 0^+} (x.\ln x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \left(\frac{\to \infty}{\to \infty}\right) \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0$$

$$\ln \lim_{x\to 0^+} y = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} x^x = e^0 = 1$$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^x (\to \infty)^{(\to 0)}$, se toma $y = \left(\frac{1}{x}\right)^x \Rightarrow \ln y = x.\ln \frac{1}{x}$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \left(x.\ln \frac{1}{x}\right) (\to 0).(\to \infty)$$

$$\lim_{x\to 0^+} \left(x.\ln \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \left(\frac{\to \infty}{\to \infty}\right) \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{x.\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$

$$\ln \lim_{x\to 0^+} y = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^x = e^0 = 1$$

c) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^x (\to 1)^{(\to \infty)}$, se toma $y = \left(1+\frac{2}{x}\right)^x \Rightarrow \ln y = x.\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$

$$\lim_{x\to \infty} \ln y = \lim_{x\to \infty} \left[x.\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)\right] (\to \infty).(\to 0)$$

$$\lim_{x\to \infty} \left[x.\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)\right] = \lim_{x\to \infty} \frac{\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \left(\frac{\to \infty}{\to \infty}\right) \overset{L'H}{=} \lim_{x\to \infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{2}{x}}.\left(-\frac{2}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to \infty} \frac{2}{1+\frac{2}{x}} = 2. \qquad \ln \lim_{x\to \infty} y = 2 \Rightarrow \lim_{x\to \infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^x = e^2$$

CASOS EN QUE NO SE QUE NO SE PUEDE APLICAR LA REGLA DE L'HOPITAL

Vimos que la regla de L'Hopital se puede aplicar bajo ciertas condiciones fijadas por las hipótesis. Además debe existir el límite del cociente de las derivadas. Veamos estos ejemplos:

a) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x + sen\ x}{x - sen\ x} \left(\frac{\to \infty}{\to \infty}\right)$

Si aplicamos la regla de L'Hopital queda:

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x + sen\ x}{x - sen\ x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to \infty} \frac{1 + cos\ x}{1 - cos\ x}$$

Este límite no existe porque el coseno oscila entre –1 y 1. Por lo tanto no se puede resolver aplicando la regla de L'Hopital.
Este límite se resuelve dividiendo por x:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+sen\ x}{x-sen\ x}\left(\frac{\to\infty}{\to\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{sen\ x}{x}}{1-\frac{sen\ x}{x}}=1$$

El $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{sen\,x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}sen\,x=0$ por ser el producto entre un infinitésimo y una función acotada.

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2.\,sen\frac{1}{x}}{sen\,x}\left(\frac{\to 0}{\to 0}\right)$

Aplicando L'Hopital queda:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2.\,sen\frac{1}{x}}{sen\,x}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2x.sen\frac{1}{x}+x^2.\,cos\frac{1}{x}.\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{cos\,x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x.\,sen\frac{1}{x}-cos\frac{1}{x}}{cos\,x}$$

Este límite no se puede calcular porque no se puede determinar el $\lim\limits_{x\to 0}cos\frac{1}{x}$, que oscila entre –1 y 1. Por lo tanto no se puede aplicar la regla de L'Hopital.

Para resolverlo se expresa de la siguiente forma:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2.\,sen\frac{1}{x}}{sen\,x}=\lim_{x\to 0}\frac{x.\,sen\frac{1}{x}}{\frac{sen\ x}{x}}=\frac{0}{1}=0$$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+sen\,x}{x}\left(\frac{\to\infty}{\to\infty}\right)$

Si aplicamos L'Hopital queda: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+sen\,x}{x}\overset{L'H}{=}\lim\limits_{x\to\infty}(1+cos\,x)$

Este límite no existe, ya que el $cos\,x$ oscila entre –1 y 1. Para resolverlo se distribuye la x.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+sen\,x}{x}=\lim_{x\to\infty}1+\frac{sen\,x}{x}=1+0=1.$$

Ya se explicó porque el $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{sen\,x}{x}=0$.

MÁS EJEMPLOS DE LÍMITES RESUELTOS

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$

Se hace $y=x^{ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\Rightarrow ln\,y=ln\left(1+\frac{1}{x}\right).ln\,x$

$$\lim_{x\to+\infty}ln\,y=\lim_{x\to+\infty}\left[ln\left(1+\frac{1}{x}\right).ln\,x\right](\to 0).(\to\infty)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[ln\left(1+\frac{1}{x}\right).ln\,x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{ln\,x}}\left(\frac{\to 0}{\to 0}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{ln\,x}}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{x+1}.\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{ln^2 x}.\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ln^2 x}{x+1}\left(\frac{\to\infty}{\to\infty}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x}{x+1}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x.\frac{1}{x}}{1}\;(\to\infty).(\to 0)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x}\left(\frac{\to\infty}{\to\infty}\right)\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$$

$$\ln\lim_{x\to+\infty}y=0\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}x^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=e^0=1$$

2) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x-x^x}{1-x+\ln x}\left(\frac{\to 0}{\to 0}\right)$

$$\lim_{x\to1}\frac{x-x^x}{1-x+\ln x}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to1}\frac{1-x^x(\ln x+1)}{-1+\frac{1}{x}}\left(\frac{\to 0}{\to 0}\right)$$

$$\overset{L'H}{=}\lim_{x\to1}\frac{-x^x(\ln x+1)^2-x^x.\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\frac{-1-1}{-1}=2$$

3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{sen\,x}\right)\;(\to+\infty)+(\to-\infty)$

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{sen\,x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{sen\,x-x}{x.sen\,x}\left(\frac{\to 0}{\to 0}\right)\overset{L'H}{=}\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{sen\,x+x.\cos x}=$$

$$\overset{L'H}{=}\lim_{x\to0}\frac{-sen\,x}{\cos x+\cos x-x.sen\,x}=\frac{0}{2}=0$$

4) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x}{cotg\,x}-\frac{\pi}{2\cos x}\right)\;(\to+\infty)+(\to-\infty)$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x}{cotg\,x}-\frac{\pi}{2\cos x}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2x.sen\,x-\pi}{2\cos x}\left(\frac{\to 0}{\to 0}\right)=$$

$$\overset{L'H}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\,sen\,x+2x.\cos x}{-2.sen\,x}=\frac{2}{-2}=-1$$

Ejercicios Generales Resueltos

1) Si h es continua en $[a;b]$, derivable en $(a;b)$, $h(a).h(b)<0$ y $\forall x\in(a;b)$ es $h'(x)\neq 0$, demostrar que existe un único $x_0\in(a;b)\,/\,h(x_0)=0$.

Debemos demostrar la existencia de una raíz y la unicidad de la misma. La función cumple con las hipótesis del teorema de Bolzano, por lo tanto podemos asegurar que en $(a;b)$ la función tiene por lo menos una raíz.

La unicidad la vamos a demostrar por el absurdo. Suponemos que hay dos valores de x, x_1 y $x_2\in(a;b)$ para los cuales se anula h, por lo tanto $h(x_1)=0$ y $h(x_2)=0$. Como si suponemos esto la función cumple con las hipótesis del Teorema de Rolle, entonces debe haber un punto c interior al intervalo $(x_1;x_2)$ en el cual $h'(c)=0$, pero esto contradice la hipótesis que asegura que $h'(x)\neq 0$, por lo tanto no puede haber dos raíces. Entonces existe sólo una.

2) Dada la función $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & si\ x<2\\ -x+7 & si\ x\geq 2\end{cases}$ indicar si cumple con las hipótesis del teorema de Rolle en $[1;5]$.

Debemos ver si $f(1)=f(5)$. $f(1)=2, f(5)=2$, entonces $f(1)=f(5)$. Ahora vemos si f es continua en $[1;5]$. El único problema puede estar en $x_0=2$.

$f(2)=5$. Para determinar si existe el límite debemos calcular los límites laterales.

$$\lim_{x\to2^+}f(x)=\lim_{x\to2^+}(-x+7)=5,\quad\lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^-}(x^2+1)=5$$

luego f es continua en $[1;5]$.

Debemos analizar si f es derivable en $(1;5)$. El problema puede estar en $x_0=2$. Calculamos las derivadas laterales.

$$f'(2)^+ = \lim_{x\to 2^+} \frac{-x+7-5}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{-(x-2)}{x-2} = -1$$

$$f'(2)^- = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+1-5}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{(x-2).(x+2)}{x-2} = 4$$

Vemos que f no es derivable en $x_0 = 2$. Por lo tanto la función no cumple con una de las hipótesis del teorema de Rolle.

3) Si $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R} \,/\, \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} f'(x) = 0$ y $\lim_{x\to 0} \frac{sen\,x\,.\,f''(x)}{f'(x)} = 4$, hallar $\lim_{x\to 0} \frac{sen\,x\,.\,f'(x)}{f(x)}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen\,x\,.\,f'(x)}{f(x)} \quad \left(\frac{\to 0}{\to 0}\right)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen\,x\,.\,f'(x)}{f(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{cos\,x\,.\,f'(x) + sen\,x.\,f''(x)}{f'(x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{cos\,x\,.\,f'(x)}{f'(x)} + \lim_{x\to 0} \frac{sen\,x\,.\,f''(x)}{f'(x)} = 1+4 = 5$$

4) Analizar la derivabilidad de $f(x) = \begin{cases} \frac{sen\,(3\,x-1)}{3\,x-1} & si\ x \neq \frac{1}{3} \\ 1 & si\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$

El único punto conflictivo es $x_0 = 1/3$. Aplicamos la definición de derivada.

$$f'\left(\frac{1}{3}\right) = \lim_{x\to\frac{1}{3}} \frac{\frac{sen\,(3x-1)}{3x-1} - 1}{x-\frac{1}{3}} \quad \left(\frac{\to 0}{\to 0}\right)$$

$$f'\left(\frac{1}{3}\right) = \lim_{x\to\frac{1}{3}} \frac{\frac{sen\,(3x-1)}{3x-1} - 1}{x-\frac{1}{3}} = \lim_{x\to\frac{1}{3}} \frac{sen\,(3x-1) - 3x + 1}{(3x-1)\,.\,(x-\frac{1}{3})} \quad \left(\frac{\to 0}{\to 0}\right)$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{3}} \frac{sen\,(3x-1) - 3x + 1}{3x^2 - 2x + 1} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\frac{1}{3}} \frac{3\,cos\,(3x-1) - 3}{6x-2} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\frac{1}{3}} \frac{-9\,sen\,(3x-1)}{6} = \frac{0}{6} = 0$$

5) Analizar la continuidad en $x = 0$ de $f: \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R} \,/$

$$f(x) = \begin{cases} cosec\,x\,.\,ln\,(1+sen\,x) & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

Vemos que la función está definida en el origen y vale 1. Debemos ver qué ocurre con el límite.

$$\lim_{x\to 0} [cosec\,x\,.\,ln\,(1+sen\,x)] \ (\to\infty).(\to 0)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{ln\,(1+sen\,x)}{sen\,x} \left(\frac{\to 0}{\to 0}\right) \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{ln\,(1+sen\,x)}{sen\,x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{cos\,x}{1+sen\,x}}{cos\,x} = \frac{1}{1} = 1$$

Vemos que el límite existe y vale 1, por lo tanto la función es continua en $x = 0$.

6) Calcular a y b reales tales que: $\lim_{x\to 0} \frac{sen\,(5x) + ax^3 + bx}{x^3} = 0$

Como es un cociente de infinitésimos, podemos aplicar la regla de L'Hopital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{5\cos(5x)+3ax^2+b}{3x^2}=0$$

Como el denominador tiende a 0, el numerador también debe tender a 0.

$5+b=0$, luego $b=-5$

Volvemos a aplicar la regla de L`Hopital

$$\lim_{x\to 0}\frac{5\cos(5x)+3ax^2+b}{3x^2}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-25sen(5x)+6ax}{6x}\overset{L'H}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-125\cos(5x)+6a}{6}=0$$

Para que este límite dé 0, el numerador debe tender a 0.

$$-125\cos 0+6a=0 \Rightarrow a=\frac{125}{6}$$

7) Dada $f(x)=\begin{cases}3x^2-5x & x<2\\ ln(x-1)+x^2+2x-6 & x\geq 2\end{cases}$ calcular $y(2{,}01)$ por aproximación lineal.

Calculamos la recta tangente en $x_0=2$. $y_0=2$. Calculamos las derivadas laterales:

$$f'(2)^-=\lim_{x\to 2^-}\frac{3x^2-5x-2}{x-2}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 2^-}\frac{6x-5}{1}=7$$

$$f'(2)^+=\lim_{x\to 2^+}\frac{ln(x-1)+x^2+2x-6-2}{x-2}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 2^+}\frac{\frac{1}{x-1}+2x+2}{1}=7$$

$$y_t-2=7(x-2) \Rightarrow y_t=7x-12 \quad \therefore y(2{,}01)=2{,}07$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Teorema de Rolle

1) Hallar c perteneciente a los intervalos indicados que cumpla con el teorema de Rolle si se verifican las hipótesis del mismo.

a) $f(x)=x^{2/3}$ en $[-1;1]$ b) $f(x)=x^3-4x$ en $[-2;2]$

c) $f(x)=tg\,x$ en $[0;\pi]$ d) $f(x)=\sqrt[3]{x}\,.(x-5)^2$ en $[0;5]$

e) $f(x)=-|2x-4|$ en $[1;3]$ f) $f(x)=\begin{cases}-x^2-x & x<0\\ x^2-x & x\geq 0\end{cases}$ en $[-1;1]$

2) Enunciar el recíproco del Teorema de Rolle. ¿Es verdadero?

3) a) Dada la función $f(x)=(x+3).(x-1).(x+1).(x+2)$ demostrar que la ecuación $f'(x)=0$ tiene exactamente tres raíces reales.

b) Demostrar que $x^3+2x+c=0$ no tiene más de una raíz real.

Teorema de Lagrange

1) Hallar c perteneciente a los intervalos indicados que cumpla con el teorema de Lagrange si se verifican las hipótesis del mismo.

a) $f(x)=\dfrac{3x-4}{2x+1}$ en $[1;4]$ b) $f(x)=ln\,(4x-3)^2$ en $[1;4]$

c) $f(x)=3x^2+4x-3$ en $[1;3]$ d) $\begin{cases}2x+3 & x<3\\ 15-2x & x\geq 3\end{cases}$ en $[0;4]$

e) $f(x)=\begin{cases}-x^3+2x & x<2\\ x^2-14x+20 & x\geq 2\end{cases}$ en $[1;4]$

2) Utilizar el teorema de Lagrange para demostrar que $|sen\,a-sen\,b|\leq|a-b|$

3) En el arco de parábola $y=x^2$ comprendido entre A = (1;1) y B = (3;9), hallar el punto cuya recta tangente es paralela a la cuerda AB.

Teorema de Cauchy

Hallar c perteneciente a los intervalos indicados que cumpla con el teorema de Cauchy si se verifican las hipótesis del mismo.

a) $f(x)=x^3$ $\quad g(x)=x^2-4x$ en $[1;3]$

b) $f(x)=3x^3-2x$ $\quad g(x)=2x+5$ en $[1;3]$

c) $f(x)=x^3-2x^2$ $\quad g(x)=x^2+x$ en $[0;2]$

Regla de L'Hopital

A) Resolver las siguientes indeterminaciones del tipo $(\to 0)/(\to 0)$

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}$ 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}$ 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{sen\,x}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,.\,sen\,(2x)}{tg\,x}$ 5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(2x-1)}{sen\,(x-1)}$ 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,(ax)}{b\,x}$

7) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+7x+6}{3x^2+5x-2}$ 8) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{sen^2\,x+sen\,x-2}{sen^2\,x-4\,sen\,x+3}$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3+2x^2+6x}{x^2-2x}$ 10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3\,.\cos x}{4\,sen\,x}$ 11) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln sen\,x}{(\pi-2x)^3}$

12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+sen\,x-1}{\ln(1+x)}$ 13) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-sen\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)}$ 14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,x-x}{x^3}$

15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-sen^2x}{x^2\,.\,sen^2x}$ 16) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{arc\,sen\sqrt{x}}$ 17) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,x-x}{x-sen\,x}$

18) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{sec^2x-2\,tg\,x}{1+\cos(4x)}$ 19) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\frac{1}{2x}}{sen\,\frac{2}{x}}$

B) Resolver las siguientes indeterminaciones del tipo $(\to\infty)/(\to\infty)$

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{x-2}$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x+2}{2x^2+3x-1}$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-3}{3x^4+2x^2-1}$ 5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{tg\,x}{tg\,(3x)}$ 6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x+x}{x.\ln x}$

7) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{tg\,x}{cotg\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$ 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x+3x^3}{4e^x+x^2}$ 9) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln sen\,x}{\ln tg\,x}$

10) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^2+1)}{\ln\left(\sqrt{x}+1\right)}$ 11) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^5}$ 12) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln sen\,(ax)}{\ln sen\,x}$

C) Resolver las siguientes indeterminaciones del tipo $(\to 0).(\to\infty)$

1) $\lim\limits_{x\to 0^+}(sen\,x\,.\ln x)$ 2) $\lim\limits_{x\to 1}\left[(x-1).\,cosec\left(x^2-1\right)\right]$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\,.\,sen\,\dfrac{a}{x}\right)$ 4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[(1-tg\,x).\,sec\,(2x)\right]$

5) $\lim\limits_{x\to 0}(arc\,sen\,x\,.\,cotg\,x)$ 6) $\lim\limits_{x\to 0}(x.\,cotg\,x)$

7) $\lim\limits_{x\to a}\left[(x-a).tg\,\dfrac{\pi\,x}{2a}\right]$ 8) $\lim\limits_{x\to 0}\left[cotg\,(2\,x).\ln(x+1)\right]$

9) $\lim\limits_{x\to a}\left[\ln\left(2-\dfrac{x}{a}\right).\,cotg\,\dfrac{\pi\,x}{a}\right]$

D) Resolver las siguientes indeterminaciones del tipo $(\to+\infty)+(\to-\infty)$

1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{sen\,x}\right)$ 2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$ 3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-cotg\,x\right)$

4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(sec\,x-tg\,x)$ 5) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{\ln(x-2)}\right)$

6) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{4}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}\right)$ 7) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$

8) $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{e^{2x}-1}-\frac{1}{sen(2x)}\right]$ 9) $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x.(x+1)}-\frac{ln(1+x)}{x^2}\right]$

E) Resolver las siguientes indeterminaciones del tipo $(\to 0)^{(\to 0)}$

1) $\lim_{x\to 1^+}(x-1)^{x-1}$ 2) $\lim_{x\to 0^+}(sen\,x)^x$ 3) $\lim_{x\to 0^+}(2x)^x$

4) $\lim_{x\to 0^+}(sen\,x)^{tg\,x}$ 5) $\lim_{x\to 1^+}(x-1)^{ln\,x}$ 6) $\lim_{x\to 1^+}(ln\,x)^{ln\,x}$

7) $\lim_{x\to 1^+}\left[cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]^{ln\,x}$ 8) $\lim_{x\to 0^+}x^{\frac{4}{2+ln\,x}}$

F) Resolver las siguientes indeterminaciones del tipo $(\to\infty)^{(\to 0)}$

1) $\lim_{x\to+\infty}(x^2-3)^{\frac{1}{ln\,x}}$ 2) $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{sen\,x}$ 3) $\lim_{x\to+\infty}(2\,x)^{\frac{1}{ln\,x}}$

4) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(tg\,x)^{cos\,x}$ 5) $\lim_{x\to+\infty}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$ 6) $\lim_{x\to 1^+}\left[\left(\frac{1}{x-1}\right)^{ln\,x}\right]$

7) $\lim_{x\to 1^+}\left[\left(\frac{1}{ln(2-x)}\right)^{x-1}\right]$ 8) $\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}$ 9) $\lim_{x\to 0^+}(cotg\,x)^{sen\,x}$

10) $\lim_{x\to+\infty}(ln\,x)^{\frac{1}{1-ln\,x}}$

G) Resolver las siguientes indeterminaciones del tipo $(\to 1)^{(\to\infty)}$

1) $\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x}\right]$ 2) $\lim_{x\to 0^+}\left[(cos\,x)^{\frac{1}{x}}\right]$ 3) $\lim_{x\to 0}\left[(2x+e^x)^{\frac{1}{x^2}}\right]$

4) $\lim_{x\to 0^+}(1+sen\,x)^{\frac{1}{x}}$ 5) $\lim_{x\to 0}\left[\left(cos\,x.e^{\frac{x^2}{2}}\right)^{\frac{4}{x^4}}\right]$ 6) $\lim_{x\to 1}\left(x^{\frac{1}{x^2-1}}\right)$

7) $\lim_{x\to 0^+}\left[(1+2x^2)^{\frac{2}{x}}\right]$ 8) $\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x-2}\right]$ 9) $\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{x-1}\right)^{2x^2}\right]$

10) $\lim_{x\to\infty}\left[\left(\frac{2x+1}{2x-3}\right)^{4x}\right]$ 11) $\lim_{x\to 1^+}\left[\left(tg\frac{\pi x}{4}\right)^{tg\frac{\pi x}{2}}\right]$ 12) $\lim_{x\to\infty}\left(1+e^{-x^2}\right)^x$

13) $\lim_{n\to 0}\left[(1-2n)^{3/n}\right]$ 14) $\lim_{t\to 0}cos\left[(1+t)^{1/t}.t\right]$

H) Efectuar el estudio completo de las siguientes funciones

1) $f(x)=\frac{e^x}{x}$ 2) $f(x)=\frac{1}{ln\,x}$ 3) $f(x)=\frac{ln\,x}{x}$ 4) $f(x)=x.e^{-x}$

5) $f(x)=x^2.e^{2x}$ 6) $f(x)=e^{1/x}$ 7) $f(x)=e^{-x^2}$

I) Resolver los siguientes límites

1) $\lim_{x\to\infty}\frac{ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}{ln\left(\frac{x-1}{x}\right)}$ 2) $\lim_{x\to 0}\left[(1+tg\,x)^{cotg\,x}\right]$ 3) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{sen^2x}-\frac{1}{x^2}\right)$

J) Resolver los siguientes problemas

1) Si f es derivable, $\lim_{x\to 1}f(x)=0$, $\lim_{x\to 1}f'(x)=l$ y $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^6-x^x}=2$, hallar l.

2) Calcular $f'(0)$ si $g(0)=g'(0)=0$ y $g''(0)=2$, si:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,/\,f(x)=\begin{cases}\frac{g(x)}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

3) Hallar $k \in \mathbb{R}$ / a) $\lim\limits_{x\to 0^+} (1+sen\,x)^{\frac{k}{x}} = e$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen^2(kx)}{2x^2} = 8$

4) Hallar a para que la función $f(x) = x^{-2}.(e^{ax} - e^x - x)$ tenga límite finito cuando $x\to 0$. Hallar el límite para este caso.

5) Hallar a, b, c y d para que el $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$ y el $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$ si

$$f(x)=\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^2+x-2}.$$

6) Hallar n para que el $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen\,x^2-2sen^2x}{x^n}$ sea finito y no nulo.

7) Si f es derivable y $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(3+2\ln x)}{x-1}+5=2$ y $f(3)=0$, hallar $f'(3)$.

8) Dada $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & si\ x\geq 0 \\ \dfrac{sen\,x}{x} & si\ x<0 \end{cases}$, a) Analizar si cumple con las hipótesis del Teorema de Lagrange en [–1;1], b) hallar por aproximación lineal $f(-0{,}1)$.

9) Hallar asíntotas lineales de $f(x)=\begin{cases} 4x+5x^2 & x\geq 2 \\ \dfrac{\ln(2-x)}{2-x} & x<2 \end{cases}$

10) Analizar si las funciones cumplen con las hipótesis del Teorema de Lagrange. En el punto b) hallar c.

a) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x-1}{x} & x\neq 0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$ en [–1;1] b) $f(x)=\begin{cases} x.\ln x & x>0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ en [0;1]

11) Hallar extremos relativos de $f(x)=\begin{cases} -x^2+1 & x\leq 1 \\ \ln x & x>1 \end{cases}$

12) Hallar asíntotas lineales de $f(x)=x.e^{1/x}$.

RESPUESTAS

Teorema de Rolle

1) a) no verifica hipótesis, no es derivable en $x = 0$

b) $c=\pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

c) no verifica hipótesis, no es continua ni derivable en $x=\dfrac{\pi}{2}$

d) $c=\dfrac{5}{7}$ e) no verifica hipótesis, no es derivable en $x = 2$.

f) $c_1=-\dfrac{1}{2}$, $c_2=\dfrac{1}{2}$

2) Si la derivada de una función se anula en un punto interior a un intervalo, entonces toma valores iguales en los extremos del mismo, además de ser derivable y continua.
Evidentemente esta afirmación no es cierta.

Teorema de Lagrange

1) a) $c = 2{,}09$ b) $c = 1{,}92$ c) $c = 2$
d) no verifica hipótesis porque no es derivable en $x = 3$
e) $c_1=\sqrt{3}$, $c_2=\dfrac{7}{2}$

3) P = (2;4)

Teorema de Cauchy

a) no verifica hipótesis, se anula $g'(x)$ b) $c = 2{,}08$ c) $c = 1{,}33$

Regla de L'Hopital

A) 1) $\frac{1}{2}$; 2) 1; 3) 2; 4) 0; 5) 2; 6) $\frac{a}{b}$; 7) $\frac{1}{7}$; 8) $-\frac{3}{2}$; 9) –3; 10) 0;

11) $-\infty$; 12) 2; 13) $-\frac{4}{\pi^2}$; 14) $\frac{1}{3}$; 15) $\frac{1}{3}$; 16) 0; 17) 2; 18) $\frac{1}{2}$; 19) $\frac{1}{4}$

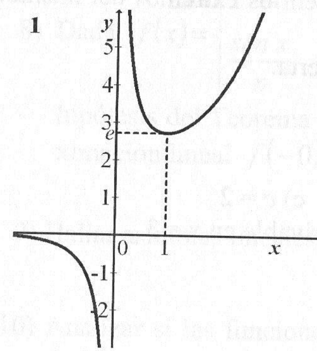
B) 1) ∞; 2) 0; 3) $\frac{3}{2}$; 4) 0; 5) 3; 6) 0; 7) 1; 8) $\frac{1}{4}$; 9) 1; 10) 4;
11) ∞; 12) 1

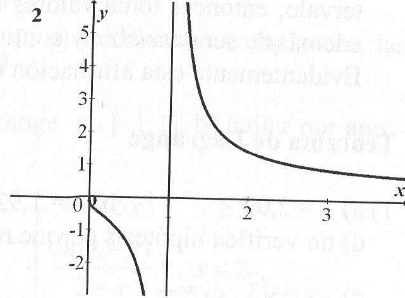
C) 1) 0; 2) $\frac{1}{2}$; 3) a; 4) 1; 5) 1; 6) 1; 7) $-\frac{2a}{\pi}$; 8) $\frac{1}{2}$; 9) $-\frac{1}{\pi}$

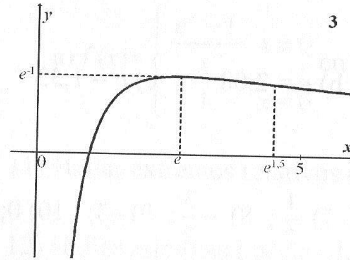
D) i) 0; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 0; 4) 0; 5) $-\frac{1}{2}$; 6) $-\frac{1}{4}$; 7) $\frac{1}{2}$; 8) $-\frac{1}{2}$; 9) $-\frac{1}{2}$

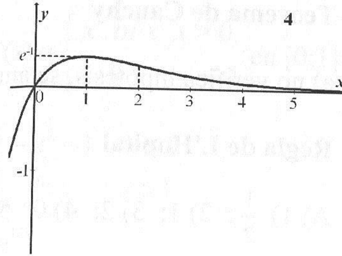
E) 1) 1; 2) 1; 3) 1; 4) 1; 5) 1; 6) 1; 7) 1; 8) e^4
F) 1) e^2; 2) 1; 3) e; 4) 1; 5) e; 6) 1; 7) e^{-1}; 8) 1; 9) 1; 10) 1
G) 1) e^6; 2) 1; 3) 4; 4) e; 5) $e^{-1/3}$; 6) $\sqrt{e}$; 7) 1; 8) e^2; 9) ∞; 10) e^8;
11) $e^{-1/4}$; 12) 1; 13) e^{-6}; 14) 1

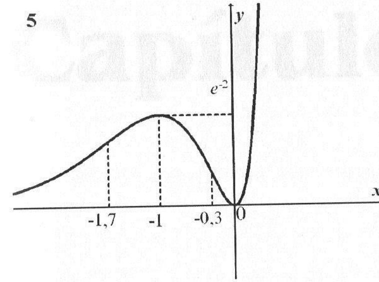
H)

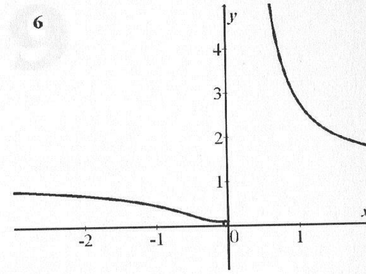


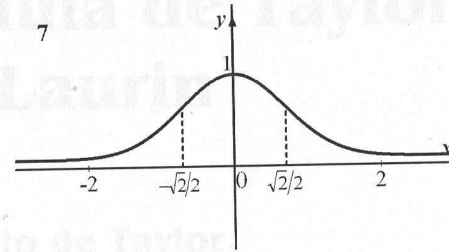












I) 1) -1, 2) e, 3) $\frac{1}{3}$ 4) 1

J) 1) $l = 10$ 2) $f'(0) = -1$ 3) a) $k = 1$, b) $k = \pm 4$ 4) $a = 2$, $l = 3/2$,
5) $a = 0, b = 1, c = -2, d = 1$ 6) $n = 2$ 7) $f'(3) = -\frac{3}{2}$

8) a) verifica las hipótesis, b) $f(-0{,}1) \cong 1$
9) A.H.: $y = 0$
10) a) verifica las hipótesis, b) $c = e^{-1}$
11) máx (0;1), mín (1;0) (punto anguloso)
12) A.O.: $y = x + 1$, A.V.: $x = 0$.

Capítulo 9

Fórmula de Taylor y Mac Laurin

Polinomio de Taylor.

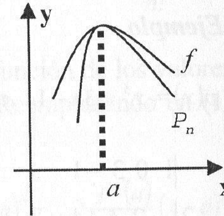
Desarrollo de la fórmula de Taylor, análisis del término complementario de Lagrange.

Polinomio de Mac Laurin.

Desarrollo de la fórmula de Mac Laurin.

FÓRMULA DE TAYLOR Y MAC LAURIN

Se trata de aproximar una función derivable mediante un polinomio particularmente elegido en un entorno de un punto $x = a$ y precisar el error o aproximación que se comete al reemplazar el valor de la función en un punto cualquiera x de su dominio próximo a $x = a$ por el valor en el mismo punto del polinomio seleccionado.



$R(x) = f(x) - P(x)$, es el error que se comete.



TAYLOR, *Brook (1685-1731):* matemático inglés, discípulo y colaborador de Newton. Fue secretario de la Academia de Ciencias de Londres mientras Newton era su presidente. Fue el primero en escribir las fórmulas de los desarrollos en serie que llevan su nombre y el de Mac Laurin. Este último planteó el dominio de aplicabilidad de las mismas. Aunque quien da la fórmula para un número finito de términos es Lagrange. El desarrollo en serie fue descubierto en 1712 y publicado en su obra *Methodus incrementorum directa e inversa* escrita entre 1715 y 1717. Pero esto se ignoró durante medio siglo hasta que Lagrange la puso de relieve. Pero el teorema lo demuestra Cauchy.

Polinomio de Taylor *(para polinomios)*

Si una función f tiene n derivadas sucesivas finitas en un punto $x = a$, existe y es único el polinomio de grado n cuyas derivadas sucesivas coinciden con las derivadas de la función f (se llama polinomio de Taylor).

Para comprobarlo se considera previamente la expresión de los coeficientes de un polinomio cualquiera, utilizando sus sucesivas derivadas.

Dado un polinomio: $p(x)=a_0+a_1x+a_2\,x^2+a_3\,x^3+\ldots+a_n\,x^n$, siempre se puede expresar, dado un número a cualquiera, como potencia de $(x-a)$, para lo cual basta con efectuar las divisiones sucesivas por dicho bimonio.

Ejemplo

$p(x)=x^3+3x-1,\ a=2$

$$\begin{array}{r|l}
 & 1\ \ 0\ \ 3\ \ -1 \\
2 & \ \ \ \ 2\ \ 4\ \ 14 \\ \hline
 & 1\ \ 2\ \ 7\ \ |\underline{13} \\
2 & \ \ \ \ 2\ \ 8 \\ \hline
 & 1\ \ 4\ \ |\underline{15} \\
2 & \ \ \ \ 2 \\ \hline
 & 1\ \ |\underline{6}
\end{array}$$

$$x^3+3x-1=\left(x^2+2x+7\right).(x-2)+13=$$
$$[(x-2).(x+4)+15].(x-2)+13=$$
$$[(x-2).[(x-2)+6]+15].(x-2)+13=$$
$$\left[(x-2)^2+6.(x-2)+15\right].(x-2)+13=$$
$$(x-2)^3+6.(x-2)^2+15.(x-2)+13$$

Todo polinomio de grado n se puede expresar en potencias de $(x-a)$ y se obtiene otro polinomio del mismo grado de la siguiente forma:

$$P_n(x)=a_0+a_1.(x-a)+a_2.(x-a)^2+a_3.(x-a)^3+\ldots+a_n.(x-a)^n \quad \textbf{(1)}$$

Vamos a expresar los a_i en función de las derivadas de $P(x)$ en $x=a$. Calculamos las derivadas de $P(x)$:

$$P'(x)=a_1+2a_2\,(x-a)+3a_3\,(x-a)^2+\ldots+n.a_n.(x-a)^{n-1}$$
$$P''(x)=2\,a_2+2.3a_3\,(x-a)+\ldots+(n-1).n.a_n.(x-a)^{n-2}$$
$$P'''(x)=2.3.a_3+\ldots+(n-2).(n-1).n.a_n.x^{n-3}$$
$$\ldots$$
$$P^n(x)=n!.a_n$$

Evaluamos las derivadas en $x=a$:

$$P(a)=a_0 \Rightarrow a_0=P(a) \qquad P'(a)=a_1 \Rightarrow a_1=P'(a)$$
$$P''(a)=2!.a_2 \Rightarrow a_2=\frac{P''(a)}{2!} \ \ldots\ P^n(a)=n!.a_n \Rightarrow a_n=\frac{P^n(a)}{n!}$$

Vemos que los coeficientes se pueden expresar en función de los valores que toma el polinomio y sus sucesivas derivadas. Reemplazando en **(1)** queda:

$$P_n(x)=P(a)+P'(a)(x-a)+\frac{P''(a)}{2!}.(x-a)^2+\frac{P'''(a)}{3!}.(x-a)^3+\ldots+\frac{P^n(a)}{n!}.(x-a)^n$$

Este polinomio recibe el nombre de *polinomio de Taylor*. El polinomio que se obtiene es igual al original, solo cambia la forma.

En el ejemplo dado vemos que los coeficientes (13;15;6;1) que se obtuvieron dividiendo el polinomio por $(x-2)$ se pueden obtener a partir de las derivadas. Esto permite generalizar este procedimiento a cualquier función que admita derivadas de orden n en $x=a$, mientras que el otro procedimiento sólo es aplicable a polinomios. De esta manera se obtiene un polinomio que se *aproxima* a la función.

***Polinomio de Taylor** (para funciones derivables)*

Sea f una función derivable hasta orden $(n+1)$ en un $E\,(a;h)$, entonces $f(x)=P_n(x)+R(x)\ \forall x\in(a-h;a+h)$.

Utilizando el polinomio de Taylor para una función f con sucesivas derivadas en $x=a$ se obtiene:

$$P_n(x)=f(a)+f'(a).(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}.(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}.(x-a)^3+\ldots+$$
$$+\frac{f^n(a)}{n!}.(x-a)^n$$

El polinomio se aproxima a la función en un entorno de $x=a$. Si queremos calcular el valor de la función en un punto x próximo a a, calcu-

lando su valor en el polinomio en lugar de hacerlo en la función, su aproximación depende de la proximidad que tengan *a* y *x* y de la cantidad de términos del polinomio de Taylor que se consideren.

Las *n* derivadas de $P_n(x)$ coinciden en $x = a$ con las *n* derivadas de $f(x)$:

$$P(a)=f(a), P'(a)=f'(a), P''(a)=f''(a), \ldots, P^n(a)=f^n(a)$$

Término complementario

Falta estimar el error que se comete $R(x)$ al utilizar el polinomio en lugar de la función.

$R(x) = f(x) - p(x)$, es decir que el resto o término complementario es la diferencia que hay entre el valor real de la función y el que se obtiene con el polinomio.

Para una función determinada el valor del resto depende de la proximidad entre *x* y *a* y de la cantidad de términos que se desarrollen del polinomio.

Lagrange, que fue el que descubrió la importancia de la fórmula de Taylor muchos años después de su muerte, fue el que determinó el valor del término complementario que lleva su nombre, *término complementario de Lagrange*. Determinó que el resto es:

$$T_{n+1}(x)=\frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}.(x-a)^{n+1} \quad \text{con } a<c<x.$$

Finalmente de obtiene la ***fórmula de Taylor***:

$$f(x)=f(a)+f'(a).(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}.(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}.(x-a)^3+\ldots+$$
$$+\frac{f^n(a)}{n!}.(x-a)^n+\frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}.(x-a)^{n+1}$$

La fórmula de Taylor se obtiene sumándole al polinomio de Taylor el término complementario.

Ejemplos

a) Desarrollar el polinomio $p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3$ en potencias de $(x+1)$.

$$p(-1)=-1-3-5-3=-12$$
$$p'(x)=3x^2-6x+5 \Rightarrow p'(-1)=14$$
$$p''(x)=6x-6 \Rightarrow p''(-1)=-12$$
$$p'''(x)=6$$

$$x^3-3x^2+5x-3=-12+14(x+1)-\frac{12}{2!}(x+1)^2+\frac{6}{3!}(x+1)^3=$$
$$=-12+14(x+1)-6(x+1)^2+(x+1)^3$$

b) Desarrollar $y=\sqrt{x}$ hasta el término de grado 3 en $a = 4$. Expresar el término complementario.

$$f(4)=\sqrt{4}=2$$
$$f'(x)=\tfrac{1}{2}x^{-1/2} \Rightarrow f'(4)=\tfrac{1}{4}$$
$$f''(x)=-\tfrac{1}{4}x^{-3/2} \Rightarrow f''(4)=-\tfrac{1}{32}$$
$$f'''(x)=-\tfrac{3}{8}x^{-5/2} \Rightarrow f'''(4)=\tfrac{3}{256}$$
$$f^{iv}(x)=-\tfrac{15}{16}x^{-7/2} \Rightarrow f^{iv}(c)=-\tfrac{15}{16}c^{-7/2}$$

$$\sqrt{x}=2+\frac{1}{4}(x-4)-\frac{1}{64}(x-4)^2+\frac{1}{512}(x-4)^3-\frac{15}{16}c^{-7/2}\cdot\frac{x^4}{4!} \qquad 4<c<x$$

c) Desarrollar $y = ln\, x$ hasta el término de grado 4 en $a = 1$. Expresar el término complementario.

$$f(0)=ln\,1=0$$
$$f'(x)=\frac{1}{x} \Rightarrow f'(1)=1$$
$$f''(x)=-\frac{1}{x^2} \Rightarrow f''(1)=-1$$

$$f'''(x)=\frac{2}{x^3} \Rightarrow f'''(1)=2$$

$$f^{iv}(x)=-\frac{6}{x^4} \Rightarrow f^{iv}(1)=-6$$

$$f^{v}(c)=\frac{24}{x^5} \Rightarrow f^{v}(c)=\frac{24}{c^5}$$

$$\ln x = x-1-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\frac{1}{5.c^5}.(x-1)^5 \text{ con } 0<c<x$$

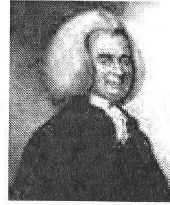
Fórmula de Mac Laurin

Es un caso particular de la fórmula de Taylor, cuando $a = 0$. El polinomio queda expresado en potencias de x.

$$f(x)=f(0)+f'(0).x+\frac{f''(0)}{2!}.x^2+\frac{f'''(0)}{3!}.x^3+\ldots+\frac{f^{n}(0)}{n!}.x^n+\frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}.x^{n+1}$$

con $0<c<x$

MAC LAURIN, ***Colin (1698-1746):*** matemático escocés, discípulo y colaborador de Newton. Fue profesor en la Universidad de Edimburgo. Planteó el problema del dominio de aplicabilidad de las fórmulas que llevan su nombre y el de Taylor, aunque fue Taylor el primero en escribirlas. Lagrange da la fórmula para un número exacto de términos pero quien logra demostrar la fórmula es Cauchy.



Nota 1: Si consideramos hasta el término de 1° orden tenemos la aproximación lineal que corresponde a la aproximación que se obtiene aplicando diferenciales, es decir el polinomio de aproximación es la recta tangente.

Nota 2: Estas fórmulas son válidas siempre y cuando el término complementario tienda a 0, es decir $\lim_{x\to a} \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}.(x-a)^{n+1}=0$.

Ejemplos

a) Obtener la fórmula de Mac Laurin correspondiente a $f(x) = e^x$ con $n = 4$.

$$f(0)=e^0=1$$

$$f'(x)=e^x \Rightarrow f'(0)=1$$

$$f''(x)=e^x \Rightarrow f''(0)=1$$

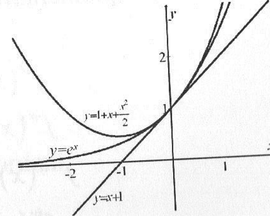
$$f'''(x)=e^x \Rightarrow f'''(0)=1$$

$$f^{iv}(x)=e^x \Rightarrow f^{iv}(0)=1$$

$$f^{v}(x)=e^x \Rightarrow f^{v}(0)=e^c$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{e^c}{5!}.x^5 \quad 0<c<x$$

$$e^{0,5}\cong 1+0,5+\frac{0,5^2}{2!}+\frac{0,5^3}{3!}+\frac{0,5^4}{4!}=1,6484375$$



b) Utilizar el polinomio de Mac Laurin hasta el término de grado 5 para aproximar el cos 0,1. Acotar el término complementario.

$$f(0)=\cos 0=1$$

$$f'(x)=-\operatorname{sen} x \Rightarrow f'(0)=0$$

$$f''(x)=-\cos x \Rightarrow f''(0)=-1$$

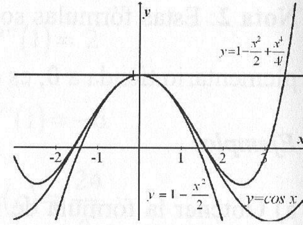
$$f'''(x)=\operatorname{sen} x \Rightarrow f'''(0)=0$$

$$f^{iv}(x)=\cos x \Rightarrow f^{iv}(0)=1$$

$$f^{v}(x)=-\operatorname{sen} x \Rightarrow f^{v}(0)=0$$

$$f^{vi}(x)=-\cos x \Rightarrow f^{vi}(c)=-\cos c$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{\cos c}{6!} . x^6 \quad 0 < c < x$$



$$\cos 0{,}1 \cong 1 - \frac{0{,}1^2}{2!} + \frac{0{,}1^4}{4!} = 0{,}995004166$$

$$\left|T_6(0{,}1)\right| = \frac{|\cos c|}{6!} . 0{,}1^6 \leq \frac{0{,}1^6}{6!} = 1{,}39.10^{-9}$$

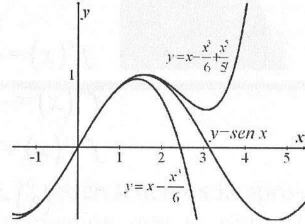
Lo que asegura que el valor obtenido tiene al menos 8 decimales exactos, al asignarle, en valor absoluto, al *cos c* valor 1 que es el mayor valor que puede tomar. *cos* 0,1 = 0,995004165 (con calculadora).

c) Desarrollar $y = sen\, x$ hasta el término de grado 5. Hallar aproximadamente *sen* 0,3. Acotar el error.

Calculamos el valor de la función y de las sucesivas derivadas hasta 5º orden en $x = 0$. La derivada de orden 6 se calcula en $x = c$ (es para el término complementario)

$$f(0) = sen\ 0 = 0$$
$$f'(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f'(0) = 1$$
$$f''(x) = -sen\, x \quad \Rightarrow \quad f''(0) = 0$$
$$f'''(x) = -\cos x \quad \Rightarrow \quad f'''(0) = -1$$
$$f^{iv}(x) = sen\, x \quad \Rightarrow \quad f^{iv}(0) = 0$$
$$f^{v}(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f^{v}(0) = 1$$
$$f^{vi}(x) = -sen\, x \quad \Rightarrow \quad f^{vi}(c) = -sen\ c$$

$$sen\, x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{sen\ c}{6!} . x^6$$



$$sen\ 0{,}3 \cong 0{,}3 - \frac{0{,}3^3}{3!} + \frac{0{,}3^5}{5!} = 0{,}29552025$$

$$\left|T_6(0{,}3)\right| = \frac{|sen\ c|}{6!} . 0{,}3^6 \leq \frac{0{,}3^6}{6!} = 1{,}01.10^{-6}$$

Lo que asegura que el valor obtenido tiene por lo menos 5 decimales exactos, al asignarle, en valor absoluto, al *sen c* valor 1 que es el mayor valor que puede tomar. *sen* 0,3 = 0,2955202067 (con calculadora).

Verificación de la condición para la existencia de extremos relativos

Desarrollamos la fórmula de Taylor hasta 2º orden en un entorno de un punto crítico $x = a$:

$f(x) = f(a) + f'(a).(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}.(x-a)^2 + T_3$. Si tenemos en cuenta que en el punto crítico la derivada primera se anula y despreciando el término complementario queda:

$f(x) - f(a) = \frac{f''(a)}{2!}.(x-a)^2$, de donde surge que el signo de $f(x) - f(a)$ depende del signo de $f''(a)$. Si $f''(a)$ es positiva, la diferencia entre $f(x)$ y $f(a)$ es positiva $\forall x \in E^*(a)$ y por lo tanto en $x = a$ hay un mínimo relativo. Si $f''(a)$ es negativa, la diferencia entre $f(x)$ y $f(a)$ es negativa $\forall x \in E^*(a)$ y por lo tanto en $x = a$ hay un máximo relativo.

Verificación de la concavidad y convexidad

Si desarrollamos la fórmula de Taylor hasta 2º orden:

$f(x) = f(a) + f'(a).(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}.(x-a)^2 + T_3$. Despejando surge que: $f(x) - \left[f(a) + f'(a).(x-a)\right] = \frac{f''(a)}{2!}.(x-a)^2 + T_3$.

En el primer miembro tenemos la diferencia entre la función y la recta tangente en $x = a$.

Si despreciamos el término complementario, vemos que el signo de esa diferencia depende del signo de $f''(a)$. Si $f''(a)$ es positiva, la diferencia entre $f(x)$ y la recta tangente es positiva $\forall x \in E^*(a)$ y por lo tanto en $x = a$ la curva es cóncava. Si $f''(a)$ es negativa, la diferencia entre $f(x)$ y la recta tangente es negativa $\forall x \in E^*(a)$ y por lo tanto en $x = a$ la curva es convexa.

EJERCICIOS GENERALES RESUELTOS

1) Determinar a_n, $n \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$ tal que:

$3x^4 - 17x^3 + 35x^2 - 32x + 17 = a_4(x-1)^4 + a_3(x-1)^3 + a_2(x-1) + a_1(x-1) + a_0$.

Debemos determinar el polinomio de Taylor, para $a = 1$, del polinomio dado:

$$p(1) = 6$$
$$p'(x) = 12x^3 - 51x^2 + 70x - 32 \Rightarrow p'(1) = -1$$
$$p''(x) = 36x^2 - 102x + 70 \Rightarrow p''(1) = 4$$
$$p'''(x) = 72x - 102 \Rightarrow p'''(1) = -30$$
$$p^{iv}(x) = 72 \Rightarrow p^{iv}(1) = 72$$
$$p(x) = 6 - (x-1) + 2(x-1)^2 - 5(x-1)^3 + 3(x-1)^4$$
$$\therefore\ a_4 = 3;\ a_3 = -5;\ a_2 = 2;\ a_1 = -1;\ a_0 = 6$$

2) Determinar el origen de la siguiente fórmula:

$$\sqrt{1+x} \cong 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots \quad |x| < 1$$

Este fórmula es el polinomio de Mac Laurin (por ser en potencias de x) correspondiente a $f(x) = \sqrt{1+x}$ hasta $n = 2$.

$$f(0) = \sqrt{1+0} = 1$$
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{2}$$
$$f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{(1+x)^3}} \Rightarrow f'(0) = -\frac{1}{4}$$
$$\sqrt{1+x} \cong 1 + \frac{1}{2}x - \frac{\frac{1}{4}}{2}x^2 + \dots \cong 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots \quad |x| < 1$$

3) Hallar h y k de modo tal que el polinomio de Mac Laurin de grado 2 de $f(x) = h.\ ln\ (1 + kx)$ sea $P_2(x) = 2x - 2x^2$.

Primero obtenemos el polinomio de Mac Laurin:

$$f(0) = h.ln1 = 0$$
$$f'(x) = \frac{h.k}{1+k.x} \Rightarrow f'(0) = h.k$$
$$f''(x) = -\frac{h.k^2}{(1+k.x)^2} \Rightarrow f'(0) = -h.k^2$$
$$p(x) = h.k.x - \frac{h.k^2}{2}.x^2 \Rightarrow h.k.x - \frac{hk^2}{2}.x^2 = 2x - 2x^2$$
$$h.k = 2 \wedge \frac{hk^2}{2} = 2 \Rightarrow h = \frac{2}{k} \ \therefore k = 2 \wedge h = 1$$

4) Hallar $\sqrt{e}$ con un polinomio de Mac Laurin de grado 3 e indicar la exactitud del resultado obtenido.

Consideramos el polinomio de Mac Laurin de grado 3 asociado a la función $f(x) = e^x$ para efectuar el cálculo aproximado:

$$P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} \quad \text{con } T_4(x) = \frac{e^c.x^4}{4!}$$

especificando $x = 0{,}5$ se tiene: $\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{(0{,}5)^2}{2!} + \frac{(0{,}5)^3}{3!}$

resulta: $\sqrt{e} \cong 1{,}6458$

Para determinar la exactitud del resultado trabajamos con el término complementario: $|T_4(0{,}5)| = \left|\frac{e^c\ (0{,}5)^4}{4!}\right| \le \frac{2\,(0{,}5)^4}{24} \cong 5.10^{-3}$.

Finalmente el resultado obtenido tiene dos cifras decimales exactas.

5) Obtener el polinomio de Mac Laurin de mayor grado posible

asociado a $f(x)=\begin{cases} x^3+5x+2 & x\le 0 \\ -x^3+5x+2 & x>0 \end{cases}$

$f(0)=0$

$f'(0)^+=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-x^3+5x+2-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-x^2+5\right)=5$

$f'(0)^-=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^3+5x+2-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2+5\right)=5 \quad \Rightarrow f'(0)=5$

$f''(0)^+=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-3x^2+5-5}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}(-3x)=0$

$f''(0)^-=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{3x^2+5-5}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}(3x)=0 \quad \Rightarrow f''(0)=0$

$f'''(0)^+=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-6x-0}{x}=-6$

$f'''(0)^-=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{6x-0}{x}=6 \quad \Rightarrow \nexists f'''(0)$

Por lo tanto el polinomio de Mac Laurin de mayor grado posible es: $p_1(x)=2+5x$

6) Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen\,x-x}{x^2}$ utilizando el polinomio de Mac Laurin

Reemplazamos el *sen x* por el desarrollo de Mac Laurin

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{x}{3!}+\frac{x^3}{5!}+\ldots\right)=0$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1) Encontrar el polinomio de Taylor para el desarrollo de:

a) $p(x)=x^3-2x^2+3x+5$ en potencias de $(x-2)$.
b) $p(x)=3x^3-13x^2+14x+7$ en potencias de $(x-2)$.
c) $p(x)=x^4+x^3-x^2-6x-6$ en potencias de $(x+1)$.

2) Desarrollar aplicando la fórmula de Taylor o Mac Laurin según corresponda:

a) $f(x)=e^x$ en el origen b) $f(x)=sen\,x$ en el origen
c) $f(x)=ln\,x$ en $a=e$

3) Mediante el desarrollo de Mac Laurin calcular sen 20º con 3 cifras decimales exactas.

4) Desarrollar mediante la fórmula de Taylor hasta el término de 3º grado $f(x)=cos\,x$ en $\frac{\pi}{4}$ y hallar el término complementario.

5) Usar el resultado del ejercicio anterior para calcular el cos 46º y determinar la exactitud del resultado.

6) Mediante el desarrollo de Mac Laurin encontrar el valor de $\sqrt{e}$ con una exactitud de 4 decimales.

7) Hallar *cos* 0,1 desarrollando por Mac Laurin hasta grado 4 y acotar el término complementario.

8) Hallar *sen* 0,5 con 5 cifras decimales y acotar el término complementario.

9) Desarrollar por Mac Laurin $y=Sh\,x$ hasta término de grado 5.

10) Demostrar la validez de las siguientes fórmulas:

a) $sen\,(a+h)-(sen\,a+h.\,cos\,a)\le \frac{1}{2}h^2$

b) $\sqrt[3]{1+x}\cong 1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2,\ |x|<1$

11) Determinar una raíz aproximada de la ecuación $ln\,x^2-\frac{5}{16}x^2=0$ mediante el desarrollo del polinomio de Taylor de 2º orden en $a=1$.

12) Sea f tal que su polinomio de Taylor de orden 2 en $a = 3$ es $p(x) = 5 + 2(x-3) - 3(x-3)^2$. Hallar el polinomio de Taylor de orden 2 de f^2 en $a = 3$.

13) Aproximando $f(x)=e^x$ con un polinomio de Mac Laurin de grado 2, resolver la ecuación $e^x = -x+2$.

RESPUESTAS

1) a) $p(x) = (x-2)^3 + 4(x-2)^2 + 7(x-2) + 11$
b) $p(x) = 3(x-2)^3 + 5(x-2)^2 - 2(x-2) + 7$
c) $p(x) = (x+1)^4 - 3(x+1)^3 + 2(x+1)^2 - 5(x+1) - 1$

2) a) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e.x^{n+1}}{(n+1)!} \qquad 0<c<x$

b) $sen\, x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^n}{n!}.sen\frac{n\pi}{2} + sen\left[c+(n+1)\frac{\pi}{2}\right].\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$
$0<c<x$

c) $ln\, x = 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{(x-e)^i.(i-1)!}{e^i.i!}.(-1)^{i-1} + \frac{(x-e)^{n+1}.n!}{c^n.(n+1)!}.(-1)^n \quad e<c<x$

3) $sen\, 20^{\circ} = 0{,}343$

4) $cos\, x = \frac{\sqrt{2}}{2}.\left[1 - \left(x-\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2}{2!} + \frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3}{3!}\right] + \frac{cos\, c}{4!}.\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4 \quad \frac{\pi}{4}<c<x$

5) $cos\, 46^{\circ} = 0{,}69465837$ 6) $\sqrt{e} = 1{,}6487$

7) $cos\, 0{,}1 = 0{,}995$, $|T_5(x)| = \left|\frac{0{,}1^5}{5!}.sen\, c\right| \leq 8{,}3.10^{-8}$

8) $sen\, 0{,}5 = 0{,}47942$, $|T_7(x)| = \left|\frac{0{,}5^7}{7!}.cos\, c\right| \leq 1{,}5.10^{-6}$

9) $Sh\, x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!}.Sh\, c \quad 0<c<x$ 11) $x_1 = \frac{4}{3}$

12) $p_2(x) = 25 + 20(x-3) - 26(x-3)^2$ 13) $x_1 \cong 0{,}45$

Capítulo 10

Integral indefinida

Concepto, definición.

Integrales inmediatas.

Tabla de integrales.

Métodos de integración: sustitución, partes, descomposición en fracciones simples.

Integrales trigonométricas.

Ecuaciones diferenciales.

INTEGRAL INDEFINIDA

Concepto

Hasta ahora hemos visto el problema de dada una función obtener la función derivada. Muchas veces es necesario plantear el problema inverso, es decir encontrar una función conocida su derivada. Esta función recibe el nombre de **primitiva**.

Por ejemplo, x^3 es una primitiva de $3x^2$, porque la derivada de x^3 es $3x^2$.

Definición: *una primitiva de una función f continua es una función F si se verifica que F es derivable y: $F'(x) = f(x)$.*

Las primitivas se simbolizan de la siguiente manera: $\int f(x).dx = F(x)$, por lo tanto es equivalente decir que una primitiva de ***f*** es una función ***F*** si $dF(x) = f(x).dx$.

Ejemplos

$$\int 4x^3.dx = x^4 \text{ porque } \left(x^4\right)' = 4x^3 \text{ o } d\left(x^4\right) = 4x^3 dx$$

$$\int cos\, x.dx = sen\, x \text{ porque } (sen\, x)' = cos\, x \text{ o } d\,(sen\, x) = cos\, x.dx$$

$$\int \frac{1}{x^2}.dx = -\frac{1}{x} \text{ porque } \left(-\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2} \text{ o } d\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2}.dx$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}.dx = arc\, tg\, x \text{ porque } (arc\, tg\, x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Pero observemos lo siguiente:

$\int 4x^3.dx = x^4$, pero también $\int 4x^3.dx = x^4 + 5$ porque $\left(x^4+5\right)' = 4x^3$

y en general $\int 4x^3.dx = x^4 + C$, donde **C** es una constante cualquiera, por ser la derivada de una constante igual a 0.

Es decir que cada función admite infinitas primitivas, que difieren en una constante.

Teorema: Si F_1 y F_2 son funciones primitivas de *f*, entonces difieren en una constante.

***Dem.*:** F_1 y F_2 son funciones primitivas de $f \Rightarrow F_1' = f \wedge F_2' = f$
Llamamos $G = F_1 - F_2 \Rightarrow G' = F_1' - F_2' = f - f = 0$
Por lo tanto $G' = 0$ y $G = k$.

Definición: *se llama integral indefinida de una función a sus infinitas primitivas*

$$\int f(x).dx = F(x) + C \;/\; F'(x) = f(x) \text{ o } dF(x) = f(x).dx$$

Propiedades de la integral indefinida

a) $\int k.f(x).dx = k.\int f(x).dx$

b) $\int [f(x) + g(x)].dx = \int f(x).dx + \int g(x).dx$

Integrales inmediatas

Son aquellas que se pueden obtener directamente. La forma de justificar que una función es una primitiva o integral indefinida de otra es derivándola. Si al derivarla se obtiene la función original, entonces quedará justificado que dicha función es la primitiva de la función dada.

De esta forma se justifica esta pequeña tabla de integrales que damos a continuación.

TABLA DE INTEGRALES

$\int dx = x + C$ $\qquad$ $\int k.dx = k\,x + C$

$\int x^n.dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$ $\qquad$ $\int \dfrac{1}{x}.dx = ln\,|x| + C$

$\int sen\ x.dx = -\cos x + C$ $\qquad$ $\int cos\ x.dx = sen\ x + C$

$\int e^x.dx = e^x + C$ $\qquad$ $\int a^x.dx = \dfrac{a^x}{ln\ a} + C$

$\int \dfrac{1}{cos^2 x}dx = \int sec^2 x\,dx = tg\ x + C$ $\qquad$ $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}.dx = ln\,|f(x)| + C$

$\int [f(x)]^n.f'(x).dx = \dfrac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$

$\int \dfrac{1}{1+x^2}.dx = arc\ tg\ x + C$ $\qquad$ $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.dx = arc\ sen\ x + C$

$\int \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}.dx = Arg\ Sh\ x + C$ $\qquad$ $\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}.dx = Arg\ Ch\ x + C$

$\int \sqrt{x^2-1}.dx = \dfrac{x.\sqrt{x^2-1}}{2} + \dfrac{1}{2} arc\ sen\ x + C$

Con esta tabla de integrales vamos a trabajar. Si la integral que buscamos no está en la tabla, a veces es posible transformarla en una que esté en la tabla a través de transformaciones algebraicas. Llamamos integrales inmediatas a aquellas que están en la tabla o que se pueden transformar en una que está en la tabla a través de operaciones algebraicas.



En el cello aparece el símbolo de integral

Ejemplos

a) $\int \sqrt{x}.dx$

Esta integral no está en la tabla, pero si la raíz la expresamos como una potencia, la tenemos en la tabla.

$$\int \sqrt{x}.dx = \int x^{1/2}.dx = \frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$$

b) $\int \frac{x^2-1}{x-1}.dx$

Es evidente que esta integral no está en la tabla, pero si factoreamos el numerador y simplificamos, obtenemos una integral inmediata.

$$\int \frac{x^2-1}{x-1}.dx = \int \frac{(x+1).(x-1)}{x-1}.dx = \int (x+1).dx = \frac{x}{2} + x + C$$

c) $\int \frac{2x+\sqrt{x}}{x^3}.dx$

En este caso debemos expresar la raíz como exponente y distribuir el denominador, queda:

$$\int \frac{2x+\sqrt{x}}{x^3}.dx = \int \frac{2x}{x^3}.dx + \int \frac{x^{1/2}}{x^3}.dx = \int 2x^{-2}.dx + \int x^{-5/2}.dx$$

$$= -\frac{2}{x} - \frac{2}{3}x^{-3/2} + C$$

d) $\int tg^2 x.dx$

$$\int tg^2 x.dx = \int \frac{sen^2 x}{cos^2 x}.dx = \int \frac{1-cos^2 x}{cos^2 x}dx = \int \frac{1}{cos^2 x}dx - \int dx = tg\,x - x + C$$

e) $\int sen^3 x . cos\,x . dx$

Si observamos detenidamente el integrando vemos que tenemos la potencia de una función ($sen^3\,x$) multiplicada por la derivada de la base de esa potencia ($cos\,x$). Este caso está en la tabla, por lo tanto es una integral inmediata: $\int sen^3 x . cos\,x . dx = \frac{sen^4 x}{4} + C$

f) $\int sen^2 x . sen(2x) . dx$

$$\int sen^2 x . sen(2x) . dx = \int sen^2 x . 2\,sen\,x\,cos\,x.dx = 2\int sen^3 x.\,cos\,x.dx =$$

$$= \frac{sen^4 x}{2} + C$$

g) $\int \frac{x}{x^2+1}.dx$

Esta integral es de fácil resolución si multiplicamos y dividimos la misma por 2: $\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}.dx$

De esta forma hemos obtenido en el numerador la derivada del denominador, este caso está en la tabla:

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}.dx = \frac{1}{2}ln\,(x^2+1) + C$$

Y así, con un poco de práctica, se pueden transformar en integrales inmediatas muchas integrales que no están en la tabla.

Si bien esto es cierto, también es cierto que no todas las integrales se pueden transformar en inmediatas. Si esto fuese posible integrar sería algo muy sencillo y no lo es. Para resolver integrales no inmediatas hay que recurrir a los llamados **métodos de integración**, que son procedimientos que tienen por objetivo transformar integrales no inmediatas en integrales inmediatas. Veremos ahora los métodos de integración.

MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

Este método consiste, como su nombre lo indica, en transformar una integral no inmediata en otra inmediata a través de una sustitución de variables.

Ejemplos

a) $\int x.\sqrt{x^2+5}.dx$

Esta integral no es inmediata y tampoco se la puede transformar en inmediata a través de procedimientos algebraicos. Vamos a resolverla aplicando el método de sustitución.
Para eso a una parte de la integral (la clave del método consiste en saber elegir qué parte) la llamamos, por ejemplo t. Luego calculamos el dt, porque la variable de integración debe coincidir con la variable del diferencial. No puede resolverse una integral cuya variable sea t y cuyo diferencial sea dx. Finalmente despejamos el dx.

$$t=x^2+5 \Rightarrow dt=2x.dx \Rightarrow dx=\frac{dt}{2x}$$

Ahora debemos sustituir en la integral original. En la integral se sustituyen la t y el dx.

$$\int x.\sqrt{x^2+5}\,.dx=\int x.t^{1/2}.\frac{dt}{2x}=\frac{1}{2}.\int t^{1/2}.\,dt=\frac{1}{2}.\frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{(x^2+5)^{3/2}}{3}+C$$

Vemos que ha quedado una integral inmediata según la variable t. Esta integral se resuelve y finalmente se vuelve a la variable original.

b) $\int sen(3x).dx \qquad t=3x \Rightarrow dt=3.dx \therefore dx=\frac{dt}{3}$

$$\int sen(3x).dx=\int sen\,t.\frac{dt}{3}=\frac{1}{3}\int sen\ t.dt=-\frac{1}{3}cos\ t+C=-\frac{1}{3}cos\,(3x)+C$$

c) $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}.dx$

$$\frac{1}{x}=t \Rightarrow -\frac{1}{x^2}.dx=dt \ \therefore dx=-x^2.dt$$

$$\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}.dx=\int \frac{e^t}{x^2}.(-x^2dt)=-\int e^t dt=-e^t+C=-e^{\frac{1}{x}}+C$$

Algunas sustituciones especiales

A veces hay que recurrir a ciertas sustituciones especiales, casos que veremos ahora.

1) $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$

Este tipo de integrales se pueden llevar a una de estas dos:

$$\int \frac{du}{u^2+1}=arc\,tg\,u+C \qquad \int \frac{du}{1-u^2}=Arg\,Th\,u+C$$

Ejemplos

a) $\int \frac{dx}{4+x^2}$

para poder llevarla a uno de los casos mencionados multiplicamos y dividimos el denominador de la integral por 4 (para obtener el 1) y

luego hacemos la sustitución: $u=\frac{x}{2} \Rightarrow dx=2\,du$

$$\int \frac{dx}{4+x^2} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{4}\int \frac{2\,du}{1+u^2} = \frac{1}{2}\,arc\,tg\,u + C = \frac{1}{2}\,arc\,tg\,\frac{x}{2} + C$$

b) $\int \frac{dx}{16-x^2}$

para poder llevarla a uno de los casos mencionados multiplicamos y dividimos el denominador de la integral por 16 (para obtener el 1) y luego hacemos la sustitución: $u = \frac{x}{4} \Rightarrow dx = 4\,du$

$$\int \frac{dx}{16-x^2} = \frac{1}{16}\int \frac{dx}{1-\left(\frac{x}{4}\right)^2} = \frac{1}{16}\int \frac{4\,du}{1-u^2} = \frac{1}{4}\,Arg\,Th\,u + C = \frac{1}{4}\,Arg\,Th\,\frac{x}{4} + C$$

c) $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$

este caso es más complicado, debemos completar cuadrados para obtener una de las expresiones mencionadas. Lo hacemos descomponiendo el 5 como 1+4. Luego dividimos y multiplicamos por 4 y hacemos:

$u = \frac{x+1}{2} \Rightarrow dx = 2\,du$

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+4} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1} = \frac{1}{4}\int \frac{2du}{u^2+1} = \frac{1}{2}\,arc\,tg\,u + C =$$

$$= \frac{1}{2}\,arc\,tg\,\frac{x+1}{2} + C$$

d) $\int \frac{dx}{9-4x^2}$

multiplicamos y dividimos por 9, luego hacemos $u = \frac{2x}{3} \Rightarrow dx = \frac{3}{2}\,du$.

$$\int \frac{dx}{9-4x^2} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{1-\left(\frac{2}{3}x\right)^2} = \frac{1}{9}\cdot\frac{3}{2}\int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{6}\,Arg\,Th\,u + C = \frac{1}{6}\,Arg\,Th\,\frac{2x}{3} + C$$

e) $\int \frac{dx}{x^2-9}$

para poder llevarla a uno de los casos mencionados debemos primero multiplicar y dividir por (–1):

$\int \frac{dx}{x^2-9} = -\int \frac{dx}{9-x^2}$, luego multiplicamos y dividimos por 9, y hacemos $u = \frac{x}{3} \Rightarrow dx = 3\,du$.

$$-\int \frac{dx}{9-x^2} = -\frac{1}{9}\int \frac{dx}{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2} = -\frac{1}{9}\int \frac{3\,du}{1-u^2} = -\frac{1}{3}\,Arg\,Th\,u + C = -\frac{1}{3}\,Arg\,Th\,\frac{x}{3} + C$$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Este tipo de integrales se deben llevar a una de estas tres:

$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = arc\,sen\,u + C$, $\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = Arg\,Sh\,u + C$ o

$\int \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = Arg\,Ch\,u + C$

Ejemplos

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

para poder llevarla a uno de los casos mencionados primero dividimos y multiplicamos el denominador de la integral por 3 (dentro de la raíz por 9) para obtener el 1, luego hacemos la sustitución:

$u = \frac{x}{3} \Rightarrow dx = 3du$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{3\,du}{\sqrt{1-u^2}} = arc\ sen\,u + C = arc\ sen\ \frac{x}{3} + C$$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{16+x^2}}$

multiplicamos y dividimos el denominador de la integral por 4 (dentro de la raíz por 16) para obtener el 1 y luego hacemos la sustitución: $u = \frac{x}{4} \Rightarrow dx = 4\,du$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{16+x^2}} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{4}\right)^2}} = \frac{1}{4}\int \frac{4\,du}{\sqrt{1+u^2}} = Arg\ Sh\,u + C = Arg\ Sh\ \frac{x}{4} + C$$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-25}}$

dividimos y multiplicamos el denominador de la integral por 5 (dentro de la raíz por 25) para obtener el 1, luego hacemos la sustitución: $u = \frac{x}{5} \Rightarrow dx = 5\,du$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-25}} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x}{5}\right)^2-1}} = \frac{1}{5}\int \frac{5\,du}{\sqrt{u^2-1}} = Arg\ Ch\,u + C = Arg\ Ch\ \frac{x}{5} + C$$

d) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{8+4x-4x^2}}$

este caso es más complicado, debemos completar cuadrados para obtener una de las expresiones mencionadas. Primero sacamos factor común (–1), luego descomponemos el –8 como 1–9. Luego dividimos y multiplicamos por 3 (dentro de la raíz por 9) y hacemos:

$u = \frac{2x+1}{3} \Rightarrow dx = \frac{3}{2}du$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{8+4x-4x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-\left(4x^2-4x-8\right)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-\left(4x^2-4x+1-9\right)}} =$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{9-(2x-1)^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{2x-1}{3}\right)^2}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{2}arc\ sen\,u + C =$$

$$= \frac{1}{2}arc\ sen\ \frac{2x-1}{3} + C$$

e) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+25}}$

Completamos cuadrados para lo cual descomponemos el 25 como 9 + 16, luego dividimos y multiplicamos el denominador de la integral por 4 (dentro de la raíz por 16) y hacemos la sustitución:

$u = \frac{x-3}{4} \Rightarrow dx = 4\,du$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+25}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+9+16}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2+16}} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x-3}{4}\right)^2+1}}$$

$$\frac{1}{4}\int \frac{4du}{\sqrt{u^2+1}} = Arg\ Sh\,u + C = Arg\ Sh\,\frac{x-3}{4} + C$$

3) $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}dx$

Este tipo de integrales se desdobla en dos integrales. Para eso se forma en el numerador la derivada del denominador. La primera integral es entonces inmediata, $ln\,|\,ax^2+bx+c\,|$ y la segunda responde al caso 1.

Ejemplos

a) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^2+2x+5}dx$, la derivada del denominador es $2x+2$, para obtenerla expresamos el numerador como $2x+2+1$, quedan así dos integra-

les: $\int \frac{2x+3}{x^2+2x+5}dx = \int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}dx + \int \frac{1}{x^2+2x+5}dx$. La primera integral es inmediata, es $ln\,|x^2+2x+5|$, la segunda ya fue resuelta en la página 324. Finalmente queda:

$$\int \frac{2x+3}{x^2+2x+5}dx = ln\left|x^2+2x+5\right| + \frac{1}{2}arc\,tg\,\frac{x+1}{2} + C$$

b) $\int \frac{5x+7}{x^2-2x+2}dx$, la derivada del denominador es $2x–2$, para obtenerla multiplicamos y dividimos el numerador por 2/5, luego restamos y sumamos –2, quedan así 2 integrales:

$\frac{5}{2}\int \frac{2x-2+\frac{14}{5}+2}{x^2-2x+2}dx = \frac{5}{2}\left[\int \frac{2x-2}{x^2-2x+2}dx + \int \frac{\frac{24}{5}}{x^2-2x+2}dx\right]$. La primera integral es inmediata, es $ln\,|x^2–2x+2|$, la segunda se lleva a *arc tg*.

$$\int \frac{dx}{x^2-2x+2} = \int \frac{dx}{(x-1)^2+1} = arc\,tg\,(x-1) + C$$

Finalmente queda:

$$\int \frac{5x+7}{x^2-2x+2}dx = \frac{5}{2}ln\left|x^2-2x+2\right| + 12\,arc\,tg\,(x-1) + C$$

MÉTODO DE INTEGRACIÓN POR PARTES

Este método fue desarrollado por Johann Bernoulli.
En el capítulo de diferenciales vimos que $d\,(u.v) = u.dv + v.du$, donde u y v son funciones de x derivables. Si integramos a ambos miembros y despejamos queda:

$$\int d(u.v) = \int u.dv + \int v.du \Rightarrow \int u.dv = u.v - \int v.du$$

El objetivo es transformar una integral no inmediata en resta de un producto de funciones y una integral que debe ser inmediata o por lo menos más sencilla que la original. Se presentan distintos casos.

Veamos.

a) $\int x.e^x.dx$

Si analizamos la fórmula vemos que una parte del integrando debe ser u y la otra dv. Parte del éxito en la resolución de este tipo de integrales está en saber elegir.

Por como sigue la fórmula vemos que de la función que sea u debemos calcular su derivada para obtener du y que de la otra función (dv) debemos calcular su integral para obtener v.
Por lo tanto conviene que dv admita integral inmediata.

En este caso ambas funciones admiten integral inmediata, pero vemos que si integramos $x.dx$ obtenemos $\frac{x^2}{2}$ que es más complicada que la función original. Probemos de la siguiente forma:

$u = x \qquad du = dx$

$dv = e^x.dx \qquad v = e^x \Rightarrow \int x.e^x.dx = x.e^x - \int e^x.dx = x.e^x - e^x + C$

Al aplicar la fórmula obtuvimos una integral inmediata.

BERNOULLI, *Johann (1667-1748)*
Es el menor de los hermanos Bernoulli, nacieron en Basilea, Suiza. Fueron alumnos de Leibniz y difundieron por Europa su Teoría del Cálculo Diferencial e Integral. Fueron los que propusieron por primera vez el uso de la palabra ***integral*** a su profesor Leibniz, ya que éste usaba la palabra *suma*.
Johann fue maestro de Euler y de L'Hopital.



Nota: Si al plantear la fórmula se obtiene una integral más complicada que la original conviene probar cambiando el orden de *u* y *dv*.

b) $\int x.sen\,x.\,dx$

$u = x \qquad du = dx$

$dv = sen\,x.dx \qquad v = -\cos x \Rightarrow$

$$\int x.sen\,x\,.dx = -x.\cos x + \int \cos x\,.\,dx = -x.\cos x + sen\,x + C$$

c) $\int x^2.\,ln\,x\,.\,dx$

vemos en este caso que no conviene hacer $dv = ln\,x.dx$ porque no tiene integral inmediata.

$u = ln\,x \qquad du = \frac{1}{x}.\,dx$

$dv = x^2.dx \qquad v = \frac{x^3}{3}$

$$\int x^2.\,ln\,x.\,dx = \frac{x^3}{3}.ln\,x - \int \frac{x^3}{3}.\frac{1}{x}.dx = \frac{x^3}{3}.ln\,x - \frac{1}{3}\int x^2.dx = \frac{x^3}{3}.ln\,x - \frac{x^3}{9} + C$$

d) $\int ln\,x\,.\,dx$

$u = ln\,x \qquad du = \frac{1}{x}.\,dx$

$dv = dx \qquad v = x$

$$\int ln\,x.\,dx = x.ln\,x - \int x.\frac{1}{x}.dx = x.ln\,x - x + C$$

e) $\int arc\,tg\,x\,.\,dx$

$u = arc\,tg\,x \qquad du = \frac{1}{x^2+1}.\,dx$

$dv = dx \qquad v = x$

$$\int arc\,tg\,x\,.\,dx = x.arc\,tg\,x - \int \frac{x}{x^2+1}dx = x.arc\,tg\,x - \frac{1}{2}ln\left|x^2+1\right| + C$$

f) $\int \cos ln\,x\,.\,dx$

$u = \cos ln\,x \qquad du = -sen\,ln\,x\,.\frac{1}{x}\,.\,dx$

$dv = dx \qquad v = x \Rightarrow \int \cos ln\,x\,.dx = x.\cos ln\,x + \int sen\,ln\,x.dx$

vemos en este caso que no llegamos a una integral inmediata, tampoco a una más compleja. Vamos a volver a aplicar el método a la integral que queda.

$u = sen\,ln\,x \qquad du = \cos ln\,x\,.\frac{1}{x}\,.\,dx$

$dv = dx \qquad v = x \Rightarrow \int sen\,ln\,x\,.dx = x.\,sen\,ln\,x - \int \cos ln\,x\,.\,dx$

vemos que llegamos al punto de partida. Veamos como salir de esto.

Reemplazando queda:

$$\int \cos ln\,x\,.\,dx = x\,.\cos ln\,x + x\,.\,sen\;ln\,x - \int \cos ln\,x\,.\,dx$$

$$2\int \cos ln\,x\,.dx = x\,.\cos ln\,x + x\,.\,sen\,ln\,x$$

$$\int \cos ln\,x\,.dx = \frac{x.\cos ln\,x + x\,.\,sen\,ln\,x}{2} + C$$

Otra integral que se resuelve así es $\int e^x.\,sen\,x\,.\,dx$.

A veces hay que aplicar el método más de una vez, veamos otro ejemplo:

g) $\int x^2.e^x.dx$

$u = x^2 \qquad du = 2x.dx$

$dv = e^x.dx \qquad v = e^x \Rightarrow \int x^2.e^x.dx = x^2.e^x - \int 2x\,.e^x.\,dx$

vemos que la integral a la que llegamos no es inmediata, pero es más sencilla que la original. Podemos volver a aplicar el método (llegamos al caso del ejemplo a). Finalmente queda:

$$\int x^2.e^x.dx = x^2.e^x - 2\,x.e^x + 2.e^x + C$$

MÉTODO DE INTEGRACIÓN POR DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES SIMPLES

Este método se utiliza para integrales del tipo $\int \frac{p(x)}{q(x)}.dx$, donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios.

Vamos a suponer, por ahora, que las expresiones racionales son propias (grado de $p(x)$ < grado $q(x)$). Después veremos que ocurre si no fuese así. Se presentan los siguientes casos que tienen que ver con el tipo de raíces que tiene el polinomio $q(x)$.

El método consiste en descomponer una expresión racional en suma de fracciones simples, ya que una fracción simple es fácilmente integrable. Primero efectuamos la descomposición y después integramos.

1) Raíces de q(x) son reales y distintas

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{1}{a_n}\left(\frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} + \frac{C}{x-x_3} + \ldots + \frac{N}{x-x_n}\right),$$ donde x_1, x_2, ..., x_n son las raíces del denominador y a_n es el coeficiente principal de $q(x)$. Hay tantas fracciones simples como raíces tiene el denominador.

Ejemplos

a) $\int \frac{x+1}{x^2-5x+6}.dx$

Primero calculamos las raíces de $q(x)$, $x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 2$ y $x_2 = 3$.

$$\frac{x+1}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} = \frac{A.(x-3)+B.(x-2)}{(x-2).(x-3)}$$

Debemos determinar que valores deben tomar A y B para que la igualdad se verifique.

Para eso igualamos los numeradores (ya que los denominadores son iguales entre sí).

$x + 1 = A.(x - 3) + B.(x - 2)$, para obtener A y B damos a x los valores de las raíces:

Si $x = 2 \quad \Rightarrow \quad 3 = -A \Rightarrow A = -3$

Si $x = 3 \quad \Rightarrow \quad 4 = B \Rightarrow B = 4 \Rightarrow \frac{x+1}{x^2-5x+6} = \frac{-3}{x-2} + \frac{4}{x-3} \Rightarrow$

$$\int \frac{x+1}{x^2-5x+6}.dx = \int \frac{-3}{x-2}dx + \int \frac{4}{x-3}dx = -3\,ln\,|x-2| + 4\,ln\,|x-3| + C$$

b) $\int \frac{x+2}{x^3+2x^2-3x}\,.dx$

Primero calculamos las raíces de $q(x)$, $x^3 + 2x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$, $x_2 = 1$ y $x_3 = -3$

$$\frac{x+2}{x^3+2x^2-3x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+3} = \frac{A.(x-1)(x+3)+B.x(x+3)+C.x(x-1)}{x.(x-1)(x+3)}$$

$x + 2 = A.(x - 1).(x + 3) + B.x.(x + 3) + C.x.(x - 1)$

Si $x = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 = -3A \Rightarrow A = -2/3$
Si $x = 1 \quad \Rightarrow \quad 3 = 4B \Rightarrow B = 3/4$
Si $x = -3 \quad \Rightarrow \quad -1 = 12C \Rightarrow C = -1/12$

$$\frac{x+2}{x^3+2x^2-3x} = \frac{-\frac{2}{3}}{x} + \frac{\frac{3}{4}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{12}}{x+3}$$

$$\int \frac{x+2}{x^3+2x^2-3x}\,.dx = \int \frac{-\frac{2}{3}}{x}dx + \int \frac{\frac{3}{4}}{x-1}dx + \int \frac{-\frac{1}{12}}{x+3}dx =$$

$$= -\tfrac{2}{3}\,ln|x| + \tfrac{3}{4}\,ln|x-1| - \tfrac{1}{12}\,ln|x+3| + C$$

c) $\displaystyle\int \frac{x+2}{2x^2+x-3}\,.dx$

Primero calculamos las raíces de $q(x)$, $2x^2 + x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ y $x_2 = -\dfrac{3}{2}$

$$\frac{x+2}{2x^2+x-3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{x+2}{(x-1).(x+\frac{3}{2})} = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{A.(x+\frac{3}{2}) + B.(x-1)}{(x-1).(x+\frac{3}{2})}$$

$x + 2 = A.(x + \frac{3}{2}) + B.(x-1)$

Si $x = 1$ $\qquad 3 = 5/2\,A \Rightarrow A = 6/5$
Si $x = -3/2$ $\quad 1/2 = -5/2\,B \Rightarrow B = -1/5$

$$\int \frac{x+2}{2x^2+x-3}\,dx = \frac{1}{2}\int\left(\frac{\frac{6}{5}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{5}}{x+\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{6}{5}\,ln|x-1| - \frac{1}{5}\,ln\left|x+\tfrac{3}{2}\right|\right] + C$$

2) Raíces de q(x) reales múltiples

En este caso cada raíz múltiple da origen a tantas fracciones simples como su orden de multiplicidad. Los exponentes de los denominadores son decrecientes desde el orden de multiplicidad hasta 1.
Por ejemplo si $q(x) = 0$ tiene raíces $x_1 = x_2 = x_3$, y x_4 distinta de las anteriores queda:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{1}{a_n}\left[\frac{A}{(x-x_1)^3} + \frac{B}{(x-x_1)^2} + \frac{C}{x-x_1} + \frac{D}{x-x_4}\right]$$

Ejemplos

a) $\displaystyle\int \frac{x^2-x+4}{(x-1)^2.(x-2)}.dx$, $q(x)$ tiene tres raíces, $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = 2$, la descomposición es la siguiente:

$$\frac{x^2-x+4}{(x-1)^2.(x-2)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x-1).(x-2)+C(x-1)^2}{(x-1)^2.(x-2)},$$

si igualamos los numeradores tenemos que:

$x^2 - x + 4 = A(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x-1)^2$

Dando a x los valores de las raíces tenemos:

$x = 2 \quad \Rightarrow \quad 6 = C \qquad \Rightarrow C = 6$
$x = 1 \quad \Rightarrow \quad 4 = -A \qquad \Rightarrow A = -4$

Vemos que tenemos más incógnitas que raíces, para obtener el valor de B le damos a x un valor cualquiera distinto de los ya dados, por ejemplo $x = 0$, $4 = -2A + 2B + C$, reemplazando A y C por sus respectivos valores queda: $4 = 8 + 2B + 6$, $B = -5$.

$$\int \frac{x^2-x+4}{(x-1)^2.(x-2)}.dx = \int \frac{-4}{(x-1)^2}.dx + \int \frac{-5}{x-1}.dx + \int \frac{6}{x-2}.dx =$$

$$= \frac{4}{x-1} - 5\,ln|x-1| + 6ln|x-2| + C$$

b) $\displaystyle\int \frac{x+13}{(x-3)^2.(x+1)^2}.dx$

tenemos dos raíces múltiples de 2º orden, cada una de las cuales da origen a dos fracciones simples. La descomposición queda:

$$\frac{x+13}{(x-3)^2.(x+1)^2}=\frac{A}{(x-3)^2}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{(x+1)^2}+\frac{D}{x+1}=$$

$$=\frac{A\,(x+1)^2+B\,(x+1)^2.(x-3)+C(x-3)^2+D(x+1).(x-3)^2}{(x-3)^2.(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow x+13=A(x+1)^2+B(x+1)^2.(x-3)+C(x-3)^2+D(x+1).(x-3)^2$$

damos a x los valores de las raíces, $x=3$, $x=-1$.

$x=3 \;\Rightarrow\; 16=16\,A \;\Rightarrow A=1$
$x=-1 \Rightarrow\; 12=16\,C \;\Rightarrow C=3/4$

Vemos que hemos obtenido dos de los coeficientes (A y C), para obtener los otros dos debemos darle a x dos valores cualesquiera distintos a los ya dados y formar así un sistema de ecuaciones. Al resolver el sistema se obtienen los valores de B y D.

$x=0 \;\Rightarrow\; 13=A-3B+9C+9D$
$x=1 \;\Rightarrow\; 14=4A-8B+4C+8D$

reemplazando los valores ya obtenidos de A y C queda:

$$\begin{cases}-3B+9D=5{,}25\\ -8B+8D=7\end{cases} \Rightarrow B=-\frac{7}{16} \text{ y } D=\frac{7}{16}\text{, finalmente queda:}$$

$$\int\frac{x+13}{(x-3)^2.(x+1)^2}.dx=\int\left(\frac{1}{(x-3)^2}-\frac{\frac{7}{16}}{x-3}+\frac{\frac{3}{4}}{(x+1)^2}+\frac{\frac{7}{16}}{x+1}\right)dx=$$

$$=-\frac{1}{x-3}-\frac{7}{16}ln|x-3|-\frac{3}{4}\frac{1}{x+1}+\frac{7}{16}ln|x+1|+C$$

3) Raíces de q(x) complejas simples

Si $q(x)$ admite raíces complejas simples, queda en el denominador el factor cuadrático sin factorear y como numerador del mismo corresponde un polinomio de grado 1.

Ejemplos:

a) $\displaystyle\int\frac{x+8}{(x-2).(x^2+1)}.dx$

el factor x^2+1 tiene raíces complejas simples, no lo factoreamos. La descomposición queda así:

$$\frac{x+8}{(x-2).(x^2+1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{A(x^2+1)+(Bx+C).(x-2)}{(x-2).(x^2+1)},$$

igualando los numeradores queda: $x+8=A\,(x^2+1)+(Bx+C)\,(x-2)$, tenemos ahora una sola raíz real para reemplazar que es $x=2$.

$x=2 \quad 10=5A \Rightarrow A=2$, para obtener los otros dos valores damos a x valores 0 y 1.

$x=0 \quad 8=A-2\,C$, como $A=2 \Rightarrow C=-3$
$x=1 \quad 9=2A-B-C$, como $A=2$ y $C=-3 \Rightarrow B=-2$,

finalmente queda:

$$\int\frac{x+8}{(x-2).(x^2+1)}.dx=\int\frac{2}{x-2}.dx-\int\frac{2x+3}{x^2+1}.dx=$$

$$=2ln|x-2|-\left[\int\frac{2x}{x^2+1}.dx+\int\frac{3}{x^2+1}.dx\right]=2ln|x-2|-ln|x^2+1|-3\,arctg\,x+C$$

b) $\int \frac{1-x^2}{x^3+x}.dx$

$$\frac{1-x^2}{x^3+x}=\frac{1-x^2}{x.\left(x^2+1\right)}=\frac{A}{x}+\frac{B\,x+C}{x^2+1}=\frac{A\left(x^2+1\right)+(B\,x+C).x}{x.\left(x^2+1\right)},$$

igualando numeradores queda:

$1-x^2 = A\,(x^2+1) + (Bx+C).x$, damos a x valor 0.

$x=0 \qquad 1=A \Rightarrow A=1$

debemos dar a x otros dos valores arbitrarios para obtener B y C, por ejemplo $x=1$ y $x=-1$.

$x=1 \qquad 0=2A+B+C$, como $A=1 \Rightarrow B+C=-2$

$x=-1 \quad 0=2A+B-C$, como $A=1 \Rightarrow B-C=-2 \Rightarrow B=-2, C=0,$

finalmente queda:

$$\int\frac{1-x^2}{x^3+x}.dx=\int\frac{1}{x}.dx-\int\frac{2x}{x^2+1}.dx=ln|x|-ln\left(x^2+1\right)+C$$

c) $\int \frac{4x^2+x+1}{x^3-1}.dx$

$q(x)$ tiene una raíz real, $x=1$ y dos raíces complejas simples. La descomposición es:

$$\frac{4x^2+x+1}{x^3-1}=\frac{4x^2+x+1}{(x-1).\left(x^2+x+1\right)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B\,x+C}{x^2+x+1}=$$

$$=\frac{A\left(x^2+x+1\right)+(B\,x+C).(x-1)}{(x-1).\left(x^2+x+1\right)}$$

$4x^2+x+1 = A\,(x^2+x+1) + (Bx+C).(x-1)$, si $x=1 \therefore 6=3A \Rightarrow A=2$

debemos darle a x otros valores para obtener B y C, por ejemplo:

$x=0 \quad \Rightarrow \quad 1=A-C$, como $A=2 \quad \Rightarrow C=1$

$x=-1 \quad \Rightarrow \quad 4=A+2B-2C$, como $A=2$ y $C=1 \Rightarrow B=2,$

finalmente queda:

$$\int\frac{4x^2+x+1}{x^3-1}.dx=\int\left(\frac{2}{x-1}+\frac{2x+1}{x^2+x+1}\right).dx=$$

$$2\,ln|x-1|+ln\left|x^2+x+1\right|+C=ln\left|(x-1)^2.\left(x^2+x+1\right)\right|.C$$

4) Raíces de q(x) complejas múltiples

Se sigue el mismo criterio que para las raíces reales múltiples. Cada factor con raíces complejas que no se descompone da origen a tantas fracciones simples como el exponente al que está elevado. Los numeradores siguen siendo polinomios de grado 1 como en el caso de las raíces complejas simples.

Ejemplo: $\int\frac{x^3-3x^2+2x-3}{\left(x^2+1\right)^2}.dx$

$$\frac{x^3-3x^2+2x-3}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{A\,x+B}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{C\,x+D}{\left(x^2+1\right)}=\frac{A\,x+B+(C\,x+D)\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$\Rightarrow x^3-3x^2+2x-3=Cx^3+Dx^2+(A+C)x+B+D$$

Como los polinomios son iguales sus respectivos coeficientes también deben serlo.

$$\begin{cases} C=1 \\ D=-3 \\ A+C=2 \\ B+D=-3 \end{cases} \Rightarrow A=1,\ B=0,\ C=1,\ D=-3$$

$$\int \frac{x^3-3x^2+2x-3}{(x^2+1)^2}.dx = \int \frac{x}{(x^2+1)^2}.dx + \int \frac{x-3}{x^2+1}.dx =$$

$$= \int \frac{x}{(x^2+1)^2}.dx + \int \frac{x}{x^2+1}.dx - 3\int \frac{dx}{x^2+1}$$

Analicemos las integrales, las dos últimas son inmediatas. La primera se resuelve por sustitución:

$\int \frac{x}{(x^2+1)^2}.dx$, hacemos $x^2+1 = u \Rightarrow 2x.dx = du \Rightarrow dx = \frac{du}{2x} \Rightarrow$

$$\int \frac{x}{(x^2+1)^2}.dx = \int \frac{x}{u^2}.\frac{du}{2x} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{2u} = -\frac{1}{2(x^2+1)},$$

finalmente queda:

$$\int \frac{x^3-3x^2+2x-3}{(x^2+1)^2}.dx = -\frac{1}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} ln\left|x^2+1\right| - 3\, arc\ tg\ x + C$$

Caso de expresiones racionales impropias

Si gr $p(x) \geq$ gr $q(x)$, primero se debe efectuar la división de los polinomios. La integral queda como suma de la integral de un polinomio (cociente de la división) más la integral de una expresión racional propia que se resuelve como ya vimos.

Ejemplo: $\int \frac{x^2-3x+3}{x^2-3x+2}.dx$

efectuamos la división de los polinomios:

$$\begin{array}{r|l} x^2-3x+3 & x^2-3x+2 \\ \hline -x^2+3x-2 & 1 \\ 1 & \end{array}$$

$$\int \frac{x^2-3x+3}{x^2-3x+2}.dx = \int \left(1 + \frac{1}{x^2-3x+2}\right).dx,$$

resolvemos la expresión propia.

$$\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{(x-1).(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A\,(x-2)+B\,(x-1)}{(x-1).(x-2)}$$

$1 = A\,(x-2) + B\,(x-1)$, si $x = 1 \Rightarrow 1 = -A \Rightarrow A = -1$
si $x = 2 \Rightarrow 1 = B \Rightarrow B = 1$

$$\int \frac{x^2-3x+3}{x^2-3x+2}.dx = \int \left(1 - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}\right).dx = x - ln|x-1| + ln|x-2| + C$$

INTEGRALES TRIGONOMÉTRICAS

1) Potencia par de seno o coseno

Se usan en este caso sustituciones trigonométricas:

$$sen^2 x = \frac{1-cos(2x)}{2},\quad cos^2 x = \frac{1+cos(2x)}{2}$$

a) $\int sen^2 x.dx = \int \frac{1-cos(2x)}{2}.dx = \frac{1}{2}x - \frac{sen(2x)}{4} + C$

b) $\int cos^2 x.dx = \int \frac{1+cos(2x)}{2}.dx = \frac{1}{2}x + \frac{sen(2x)}{4} + C$

c) $\int cos^4 x.dx = 1 + 2cos(2\alpha) + cos^2(2x) =$

$$\int \left(\frac{1}{4} + \frac{cos(2x)}{2} + \frac{1+cos(4x)}{8}\right).dx = \frac{3}{8}x + \frac{sen(2x)}{4} + \frac{sen(4x)}{32} + C$$

2) Potencia impar de seno o coseno

Se descompone la potencia impar en una par y otra de exponente 1. La potencia par se sustituye por las relaciones: $cos^2 x = 1 - sen^2 x$ o $sen^2 x = 1 - cos^2 x$.

a) $\int sen^3 x \, .\, dx = \int sen\, x \,.\, sen^2 x .\, dx = \int sen\, x \,.\, (1 - cos^2 x) dx$

$= \int (sen\, x - sen\, x .cos^2 x).\, dx = -cos\, x + \frac{cos^3 x}{3} + C$

b) $\int cos^5 x \,.\, dx = \int cos\, x .cos^4 x \,.\, dx = \int cos\, x \,.\, (1 - sen^2 x)^2 .\, dx =$

$= \int (cos\, x - 2\, cos\, x .sen^2 x + cos\, x \,.\, sen^4 x).\, dx =$

$= sen\, x - \frac{2\, sen^3 x}{3} + \frac{sen^5 x}{5} + C$

3) Producto de potencias de seno y coseno con un exponente impar

Se mantiene igual la potencia par, se descompone la potencia impar como en el caso 2.

a) $\int sen^2 x \,.\, cos^3 x \,.\, dx = \int sen^2 x \,.\, cos\, x \,.\, (1 - sen^2 x).\, dx =$

$= \int (sen^2 x \,.\, cos\, x - sen^4 x \,.\, cos\, x).\, dx = \frac{sen^3 x}{3} - \frac{sen^5 x}{5} + C$

b) $\int cos^2 x \,.\, sen^5 x \,.\, dx = \int cos^2 x \,.\, sen\, x \,.\, (1 - cos^2 x)^2 .\, dx =$

$= \int [cos^2 x \,.\, sen\, x. (1 - 2\, cos^2 x + cos^4 x)].\, dx =$

$= \int (cos^2 x \,.\, sen\, x - 2\, cos^4 x \,.\, sen\, x + cos^6 x \,.\, sen\, x).\, dx =$

$= -\frac{cos^3 x}{3} + \frac{2\, cos^5 x}{5} - \frac{cos^7 x}{7} + C$

4) Producto de potencias de seno y coseno con dos exponentes pares

Se aplican las sustituciones del caso 1)

OTRAS INTEGRALES TRIGONOMÉTRICAS

a) $\int \sqrt{1 + cos\, x} \,.\, dx$

Se resuelve teniendo en cuenta la siguiente sustitución:

$1 + cos\, x = 2\, cos^2 \frac{x}{2}$

$$\int \sqrt{1 + cos\, x} \,.\, dx = \int \sqrt{2 cos^2 \frac{x}{2}} .dx = \sqrt{2} \int cos \frac{x}{2} .dx = 2\sqrt{2}.\, sen \frac{x}{2} + C =$$

b) $\int \sqrt{1 - cos\, x} \,.dx$

Se resuelve teniendo en cuenta la siguiente sustitución:

$1 - cos\, x = 2\, sen^2 \frac{x}{2}$

$$\int \sqrt{1 - cos\, x} \,.\, dx = \int \sqrt{2 sen^2 \frac{x}{2}} .dx = \sqrt{2} \int sen \frac{x}{2} .dx = -2\sqrt{2}.\, cos \frac{x}{2} + C$$

c) $\int sec\, x \,.\, dx$, se divide y multiplica por $sec\, x + tg\, x$.

$$\int sec\, x \,.\, dx = \frac{sec^2 x + sec\, x .tg\, x}{sec\, x + tg\, x} = ln\, |sec\, x + tg\, x| + C$$

observamos que esta integral es inmediata ya que el numerador es la derivada del denominador.

d) $\int tg^3x\,.sec^3x\,.dx$ sabiendo que $tg^2x+1=sec^2x$, hacemos

$sec\,x=u \Rightarrow du=sec\,x.\,tg\,x.dx$

$$\int tg^3x\,.sec^3x\,.dx=\int tg^3x.u^3.\frac{du}{u.tg\,x}=tg^2x.u^2.du=\int(u^2-1)u^2.du=$$

$$=\int(u^4-u^2)du=\frac{u^5}{5}-\frac{u^3}{3}+C=\frac{sec^5x}{5}-\frac{sec^3x}{3}+C$$

e) $\int\frac{sen^2x}{cos^6x}.dx$, la llevamos a producto entre potencias de $tg\,x$ y $sec\,x$.

$$\int\frac{sen^2x}{cos^2x}.\frac{1}{cos^4x}dx=\int tg^2x.sec^4x.dx\text{, hacemos } tg\,x=u,\ du=sec^2x.dx$$

$$\int tg^2x.sec^4x.dx=\int u^2.sec^4x.\frac{du}{sec^2x}=\int u^2.sec^2x.du=\int u^2(u^2+1).du=$$

$$=\int(u^4+u^2).du=\frac{u^5}{5}+\frac{u^3}{3}+C=\frac{tg^5x}{5}+\frac{tg^3x}{3}+C$$

INTEGRALES IRRACIONALES

Se resuelven efectuando sustituciones adecuadas para transformarlas en integrales de expresiones racionales, veamos algunos casos:

a) $\int\frac{dx}{x+\sqrt{x}}$

se resuelve haciendo la siguiente sustitución:

$\sqrt{x}=u \Rightarrow x=u^2 \therefore dx=2u.du$ (despejamos x y calculamos dx)

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x}}=\int\frac{2u}{u^2+u}.du=2\int\frac{1}{u+1}.du=2ln|u+1|+C=2ln\left|\sqrt{x}+1\right|+C$$

b) $\int\frac{\sqrt{x+1}-5}{\sqrt{x+1}+1}dx$

hacemos $\sqrt{x+1}=u \Rightarrow x=u^2-1 \therefore dx=2u.du$

$\int\frac{u-5}{u+1}.2u.du=2\int\frac{u^2-5u}{u+1}.du$, llegamos a la integral de una expresión racional impropia, debemos efectuar la división:

$$\begin{array}{r|l} u^2-5u & u+1 \\ \hline -u^2-u & u-6 \\ -6u & \\ 6u+6 & \\ \hline 6 & \end{array}
\quad \text{o} \quad
\begin{array}{r|rrr} & 1 & -5 & 0 \\ -1 & & -1 & 6 \\ \hline & 1 & -6 & \underline{|6} \end{array}$$

$$\frac{u^2-5u}{u+1}=u-6+\frac{6}{u+1} \Rightarrow 2\int\frac{u^2-5u}{u+1}.du=2\int\left(u-6+\frac{6}{u+1}\right).du=$$

$$u^2-12u+12\,ln|u+1|+C=x+1-12\sqrt{x+1}+12\,ln\left|\sqrt{x+1}+1\right|+C$$

c) $\int\frac{x}{2+\sqrt{x+1}}dx$

hacemos $\sqrt{x+1}=u \Rightarrow x+1=u^2 \Rightarrow dx=2u.du$

$\int\frac{u^2-1}{2+u}.2u.du=2\int\frac{u^3-u}{2+u}.du$, llegamos a la integral de una expresión racional impropia, debemos efectuar la división:

$$\begin{array}{r|l} u^3-u & u+2 \\ \hline -u^3-2u^2 & u^2-2u+3 \\ -2u^2-u & \\ 2u^2+4u & \\ \hline 3u & \\ -3u-6 & \\ \hline -6 & \end{array}
\quad \text{o} \quad
\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & & -2 & 4 & -6 \\ \hline & 1 & -2 & 3 & \underline{|-6} \end{array}$$

$$=2\int\frac{u^3-u}{2+u}.du=2\int\left(u^2-2u+3-\frac{6}{u+2}\right).du=\frac{2u^3}{3}-2u^2+6u-12ln|u+2|+C$$

$$=\frac{2\sqrt{(x+1)^3}}{3}-2(x+1)+6\sqrt{x+1}-12\,ln\left|\sqrt{x+1}+2\right|+C$$

d) $\int cos^3x.\sqrt{sen\,x}.dx$

hacemos $\sqrt{sen\,x}=u\Rightarrow sen\,x=u^2\Rightarrow dx=\dfrac{2u.\,du}{cos\,x}$, además

$sen^2x=u^4\Rightarrow cos^2x=1-u^4$

$$\int cos^3x.\sqrt{sen\ x}.dx=\int cos^3x.u.\frac{2u.du}{cos\,x}=2\int cos^2x.u^2.du=$$

$$=2\int(u^2-u^6).du=\frac{2u^3}{3}-\frac{2u^7}{7}+C=\frac{2\left(\sqrt{sen\,x}\right)^3}{3}-\frac{2\left(\sqrt{sen\,x}\right)^7}{7}+C$$

COMBINANDO MÉTODOS

a) $\int arc\,tg\,\sqrt{x}.dx$, integramos por partes

$u=arc\,tg\,\sqrt{x}.dx$ $du=\dfrac{1}{1+x}.\dfrac{1}{2\sqrt{x}}.dx$

$dv=dx$ $v=x$

$$\Rightarrow\ \int arc\,tg\,\sqrt{x}\,.dx=x.arc\,tg\,\sqrt{x}-\frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$$

Aplicamos ahora sustitución: hacemos $\sqrt{x}=t\Rightarrow x=t^2\Rightarrow dx=2\,t\,dt$

$\int\dfrac{\sqrt{x}}{1+x}dx=\int\dfrac{t}{1+t^2}.2t.dt=2\int\dfrac{t^2}{1+t^2}.dt$, llegamos a una integral racional impropia. Efectuamos la división:

t^2	t^2+1
$-t^2-1$	1
-1	

$$\int\frac{\sqrt{x}}{1+x}dx=\int\frac{t}{1+t^2}.2t.dt=2\int\frac{t^2}{1+t^2}.dt=2\int\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right).dt=$$

$$=2t-2\,arc\,tg\,t+C=2\sqrt{x}-2\,arc\,tg\,\sqrt{x}+C$$

$$\int arc\,tg\,\sqrt{x}.dx=x.arc\,tg\,\sqrt{x}-\sqrt{x}+arc\,tg\,\sqrt{x}+C$$

b) $\int sec^3x.dx$, aplicamos por partes haciendo $sec^3x=sec\,x.\,sec^2x$

$u=sec\,x$ $du=sec\,x.\ tg\,x$

$dv=sec^2x.\ dx$ $v=tg\,x$

$$\int sec^3x.dx=sec\,x\,.tg\,x-\int sec\,x\,.tg^2\,x\,.dx$$

reemplazando $tg^2x=sec^2x-1$ queda

$$\int sec^3x.dx\ =sec\,x\,.tg\,x-\int\left(sec^3x-sec\,x\right).dx,$$

agrupando queda: $2\int sec^3x\,.dx=sec\,x\,.tg\,x+\int sec\,x\,.dx$, debemos resolver $\int sec\,x\,.dx$, ya vista: $\int sec\,x\,.dx=ln\,(sec\,x+tg\,x)$.

Finalmente $\int sec^3\,x\,.dx=\dfrac{sec\,x\,.tg\,x+ln\,(sec\,x+tg\,x)}{2}+C$

c) $\int ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right).dx$

Empezamos integrando por partes

$u = ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) \quad du=\left[\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}.\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)\right]dx=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.dx$

$dv = dx \quad v = x$

$$\Rightarrow \int ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right).dx = x.ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

debemos calcular $\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.dx$, es una integral irracional, hacemos

$\sqrt{1+x^2}=u \Rightarrow 1+x^2=u^2 \therefore 2x.dx=2u.du \Rightarrow x.dx=u.du$

$\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.dx=\int\frac{u.du}{u}=\int du=u+C=\sqrt{1+x^2}+C$

$$\Rightarrow \int ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right).dx=x.ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}+C$$

d) $\int 2^{2x}x.sen\,2^x.dx$

Se puede expresar como $\int(2^x)^2.sen\,2^x.dx$, hacemos $u=2^x \Rightarrow$

$du=2^x.\,ln\,2.\,dx \Rightarrow dx=\frac{du}{2^x.ln\,2}=\frac{du}{u.ln\,2}$. Sustituyendo queda:

$\int(2^x)^2.sen\,2^x.dx=\int u^2.sen\,u.\frac{du}{u.ln\,2}=\frac{1}{ln\,2}.\int u.sen\,u.du$, esta última integral se hace por partes (ver página 330).

$\int(2^x)^2.sen\,2^x.dx=\frac{1}{ln\,2}.(-u.cos\,u+sen\,u+C)=$

$=\frac{1}{ln\,2}.\left(-2^x.cos\,2^x+sen\,2^x+C\right)$

e) $\int x.cos^2x.dx$

$u = x \quad du = dx$

$dv = cos^2x.\,dx \quad v=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}sen\,(2x)$ (ver página 341)

$\int x.cos^2x.dx=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x.sen\,(2x)-\int\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}sen\,(2x)\right).dx$

$=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x.sen\,(2x)-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{8}cos\,(2x)=$

$=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x.sen\,(2x)+\frac{1}{8}cos\,(2x)$

Ecuaciones Diferenciales

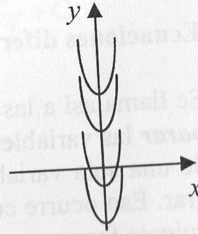
Se llama así a una ecuación que vincula a un número finito de variables con las derivadas de una de ellas respecto de las otras, o lo que es equivalente, los diferenciales de las variables.

Ejemplos: $y'-2xy=2y$, $\quad \frac{dy}{dx}=3xy$,

Ejemplo: resolver $y'=x$

Se trata de encontrar todas las funciones cuyas derivadas sean iguales a x.

Para resolverla expresamos la derivada como cociente de diferenciales:



$$\frac{dy}{dx}=x \Rightarrow dy=x.dx \therefore \int dy=\int x.dx \Rightarrow y=\frac{x^2}{2}+C$$

Integrando ambos miembros se obtiene la solución general, constituida en este caso por una familia de parábolas.

Obsérvese que no hay una única función sino que son infinitas que difieren en una constante. Por eso se dice que la solución general de una ecuación diferencial es una ***familia*** de funciones.

Solución general de una ecuación diferencial

La solución general de una ecuación diferencial está constituida por todas las funciones que satisfacen la ecuación diferencial. Hay que tener en cuenta que así como en una ecuación algebraica la solución son números, la solución de una ecuación diferencial son funciones.

Solución particular

Se llama así a la función que además de pertenecer a la solución general cumple con alguna condición adicional, por ejemplo la de pasar por un punto **P** determinado.

Si en el ejemplo anterior queremos la solución que pasa por **P = (1;1)**, estamos buscando una solución particular. Para obtenerla debemos calcular la constante:

$y=\frac{x^2}{2}+C \Rightarrow 1=\frac{1}{2}+C \quad \therefore \quad C=\frac{1}{2}$ por lo tanto la solución particular

es: $y=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}$, que de todas las parábolas que forman parte de la solución general es la que pasa por el punto **P=(1;1)**.

Ecuaciones diferenciales de variables separables

Se llama así a las ecuaciones diferenciales en las cuales se pueden ***separar*** las variables, es decir que en cada miembro de la ecuación quede una sola variable con su diferencial de modo que se puedan integrar. Eso ocurre cuando la ecuación diferencial se puede llevar a la siguiente forma:

$y'=P(x).Q(y) \Rightarrow \frac{dy}{dx}=P(x).Q(y)$, separando las variables se tiene

$$\frac{dy}{Q(y)}=P(x).dx \Rightarrow \int\frac{dy}{Q(y)}=\int P(x).dx$$

Ejemplos

a) Resolver $3xy'-x^2y=0 \Rightarrow y'=\frac{x}{3}y$

Si expresamos la derivada como cociente de diferenciales, se pueden separar las variables:

$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{3}y \Rightarrow \frac{dy}{y}=\frac{x}{3}dx$, integrando miembro a miembro

$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{x}{3}dx \Rightarrow ln\, y=\frac{x^2}{6}+C$, Finalmente $y=e^{\frac{x^2}{6}}.k$

b) Resolver: $y^2.y'-x^2-x=0$ con $y(0)=2$

Despejando obtenemos: $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+x}{y^2}$

Separando variables: $y^2.dy=\left(x^2+x\right).dx$

Integrando miembro a miembro, resulta: $\frac{y^3}{3}=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+C$

Obtenemos: $y=\sqrt[3]{x^3+\frac{3x^2}{2}+C}$

Aplicando la condición inicial $y(0)=2$, es $C=8$

Finalmente $f:\Re\rightarrow\Re \,/\, f(x)=\sqrt[3]{x^3+\frac{3x^2}{2}+8}$

ALGUNAS APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

El modelo de crecimiento-disminución exponencial

Si consideramos el modelo de crecimiento exponencial (ver página 66), vemos que la población crece según la ley: $P(t) = C.a^t$, con $a > 0$.

Si $a > 1$, el modelo es de *crecimiento exponencial* y si $a < 1$ el modelo es de *disminución exponencial*.

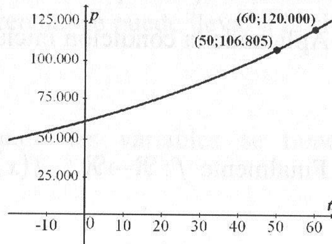
El modelo malthusiano[1] de crecimiento de una población supone que el crecimiento-disminución de la población es directamente proporcional a la misma. Tenemos entonces que en cada instante se verifica que: $\frac{dP}{dt} = k.P(t)$, donde k es una constante de proporcionalidad y $P(t)$ es el tamaño de la población en el instante t.

De donde surge que $\frac{dP}{P(t)} = k.dt \Rightarrow \int \frac{dP}{P(t)} = \int k.dt$

$$\ln P(t) = kt + C_1 \Rightarrow P(t) = e^{kt+C_1} = C.e^{kt} = C.(e^k)^t = C.a^t$$

Ejemplos

1) La tasa de crecimiento natural de la población de una ciudad es directamente proporcional al número de habitantes. Si la población se duplica en 60 años y si en 1970 era de 60.000 habitantes. Calcular la población para el año 2020.



Si consideramos que para 1970, $t = 0$, $P(60) = 2P(0)$

$P(0) = 60.000 = C \Rightarrow P(t) = 60.000a^t$

$P(60) = 60.000.a^{60} = 120.000$

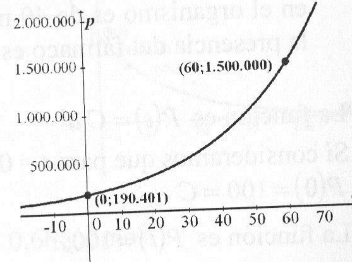
[1] Nombre debido a Tomas Walter Malthus (1766-1834), científico británico que se dedicó al estudio del crecimiento de las poblaciones.

$a^{60} = 2 \therefore a = 1{,}0116$

$P(t) = 60.000.1{,}0116^t \qquad P(50) = 60.000.1{,}0116^{50} = 106.805$

En el año 2020 habrá 106.805 habitantes.

2) La tasa de crecimiento bacteriano en un cierto cultivo es directamente proporcional al número de bacterias presente y este número se duplica cada 20 minutos. Si al cabo de 1 hora hay 1.500.000 bacterias, ¿cuántas bacterias había inicialmente?



$P(t) = C.a^t$

$P(0) = C$ y $P(20) = C.a^{20}$

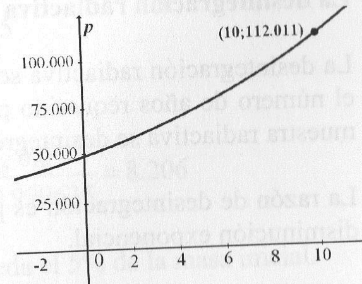
$P(20) = 2P(0) \Rightarrow Ca^{20} = 2C$

$\therefore a^{20} = 2 \Rightarrow a = 1{,}035$

$$P(60) = C.1{,}035^{60} = 1.500.000 \Rightarrow C = \frac{1.500.000}{1{,}035^{60}} = 190.401$$

$P(0) = 190.401$, es decir que inicialmente había 190.401 bacterias.

3) Se descubre un cardumen cuya tasa de crecimiento natural es directamente proporcional al número de peces. Inicialmente había 50.000 peces, cinco años después había 75.000. Hallar cuántos peces habrá diez años después de descubierto el cardumen.



La función es $P(t) = C.a^t$

Si consideramos que para $t = 0$,

$P(0) = 50.000 = C$

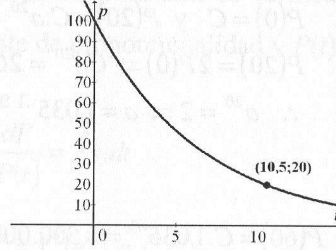
$P(t) = 50.000.a^t$

$P(5)=50.000.a^5=75.000 \Rightarrow a^5=1{,}5 \therefore a=1{,}084$

$P(t)=50.000.1{,}084^t \qquad P(10)=50.000.1{,}084^{10}=112.011$

A los 10 años habrá 112.011 peces.

4) Se administra a una persona una medicación con una dosis de 100 miligramos. La cantidad de medicamento en la sangre disminuye en forma proporcional a la cantidad de medicación en la sangre. Al cabo de 6 horas, una muestra de sangre revela que la concentración en el organismo es de 40 miligramos, determinar en cuanto tiempo la presencia del fármaco es de 20 miligramos.



La función es $P(t)=C.a^t$

Si consideramos que para $t=0$,

$P(0)=100=C$

La función es $P(t)=100.a^t$

Si consideramos que para $t=6$,

$P(6)=100.a^6=40 \qquad a^6=0{,}4 \therefore a=0{,}858$

$P(t)=100.0{,}858^t \qquad 20=100.0{,}858^t \Rightarrow t=\dfrac{log\,0{,}2}{log\,0{,}858}=10{,}5$

Luego de 10,5 horas de suministrado el medicamento habrá 20 miligramos en la sangre.

La desintegración radiactiva

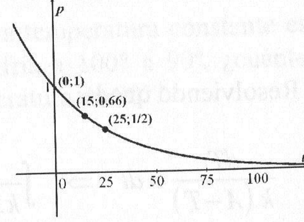
La desintegración radiactiva se mide en términos de *semividas*, que es el número de años requerido para que la mitad de los átomos de una muestra radiactiva se desintegre.

La razón de desintegración es proporcional a la masa. Este caso es de disminución exponencial.

Ejemplos

1) Si la semivida de un elemento radiactivo particular es de 25 años y la desintegración es proporcional a la masa, ¿Cuánto quedará de 1 gramo 15 años después?

Si llamamos y a la masa (en gramos), tenemos que $y=C.a^t$



$y(0)=1$ e $y(25)=1/2$

$y=C.a^t \Rightarrow 1=C.a^0 \therefore C=1$

$y=a^t, \quad 0{,}5=a^{25} \Rightarrow$

$log\,a=\dfrac{log\,0{,}5}{25}=-0{,}012 \therefore a=0{,}973$

$y=0{,}973^t \Rightarrow y(15)=0{,}973^{15}=0{,}66$

Por lo tanto después de 15 años quedan 0,66 gramos.

2) Si la semivida de un elemento radiactivo particular es de 1900 años, y la desintegración es proporcional a la masa ¿Cuánto tardará en desaparecer el 95% de la cantidad inicial?

Si llamamos y a la masa (en gramos), tenemos que $y=C.a^t$

Llamamos m_0 a la cantidad inicial.

$y(0)=m_0=C \qquad y(1900)=\dfrac{1}{2}m_0$

$\dfrac{1}{2}m_0=m_0.a^{1.900} \Rightarrow a^{1.900}=0{,}5$

$log\,a=\dfrac{log\,0{,}5}{1.900} \Rightarrow a=0{,}999635$

$0{,}05m_0=m_0.0{,}999635^t \Rightarrow t=\dfrac{log\,0{,}05}{log\,0{,}999635}=8.206$

Por lo tanto después de 8.206 años queda el 5% de la masa inicial.

Ley de enfriamiento de Newton

La razón de cambio de la temperatura T=T(t) de un cuerpo con respecto al tiempo t es proporcional a la diferencia entre la temperatura A del medio ambiente y la temperatura T del cuerpo.

Luego, si $T=T(t)$ representa la temperatura de un cuerpo en el instante t, entonces la ecuación diferencial que modela esta situación es:

$$\frac{dT}{dt}=k.(A-T)$$

Resolviendo queda:

$$\frac{dT}{k.(A-T)}=dt \Rightarrow \int\frac{dT}{k.(A-T)}=\int dt$$

$$-ln(A-T)=k.t+C_1 \Rightarrow A-T=e^{-kt+C_1}=C.a^t$$

De donde: $T(t)=A+Ca^t$, $T(0)=A$

Ejemplos

1) Si una torta sale del horno a una temperatura de 200°, después de dos minutos se encuentra a una temperatura de 150°, ¿cuanto tiempo más tardará en llegar a una temperatura de 100°, si se encuentra en una habitación cuya temperatura es 30°?

La función es $T(t)=30+C.a^t$

Sea $T(0) = 200$, sustituyendo en la ecuación, determinamos el valor de la constante C, $200=30+C.a^0$, de donde surge que $C=170$.
Ahora calculamos la constante a.

Como $T(2)=150$, $150=30+170.a^2$

Entonces la ley de enfriamiento de Newton es:

$T(t)=30+170.0,84^t$. Ahora buscamos t para que T sea 100.
$100=30+170.0,84^t \Rightarrow 0,84^t=0,41$.

$$t=\frac{log\ 0,41}{log\ 0,84} \Rightarrow t=5,11 \text{ minutos.}$$

2) Si un objeto está en una habitación cuya temperatura constante es de 60°, después de diez minutos se enfría a 100° a 90°, ¿cuánto tiempo más tardará en llegar a una temperatura de 80°?

La función es $T(t)=60+C.a^t$

Sea $T(0) = 100$, sustituyendo en la ecuación, determinamos el valor de la constante C, $100=60+C.a^0$, de donde surge que $C=40$.

Ahora calculamos la constante a.

Como $T(10)=90$, $90=60+40.a^{10}$, $a^{10}=0,75$.

Por lo tanto $log\ a=\frac{log\ 0,75}{10} \Rightarrow a=0,9716$.

Entonces la ley de enfriamiento de Newton es: $T(t)=60+40.0,9716^t$.
Ahora buscamos t para que T sea 80.

$80=60+40.0,9716^t \Rightarrow 0,9716^t=0,5$

$$t=\frac{log\ 0,5}{log\ 0,9716} \Rightarrow t=24,05 \text{ minutos.}$$

El modelo del aprendizaje humano

El aprendizaje humano es un proceso extremadamente complicado. La biología y la química del aprendizaje están aún muy lejos de entenderse completamente. Si bien los modelos simples del aprendizaje no abarcan esta complejidad, sí pueden dar los aspectos limitados del proceso.

En este caso suponemos que la tasa a la cual un estudiante puede memorizar parte de una lista de n datos es proporcional a la cantidad de datos que le falta memorizar. La función a considerar es $y = f(t)$, donde y mide la cantidad de datos memorizados al instante t. Por lo tanto $\frac{dy}{dt} = k.(n-y)$.

$$\frac{dy}{k.(n-y)} = dt \therefore -ln(n-y) = k.t + C \Rightarrow ln(n-y) = -k.t - C$$

$$n - y = e^{-k.t-C} = a^t K \Rightarrow y(t) = n - a^t K$$

K depende de las características de cada individuo.

Ejemplo: un estudiante tiene 3 horas para presentarse a un examen y durante este tiempo tiene que memorizar 60 datos. Si el estudiante memoriza 15 datos en los primeros 20 minutos, ¿cuántos logrará memorizar en las 3 horas?, ¿y en dos horas?

$y(t) = 60 - a^t K, \quad y(0) = 0 = 60 - a^0 K \Rightarrow K = 60$

$y(t) = 60 - a^t 60, \; 15 = 60 - a^{1/3} 60 \Rightarrow a = \frac{27}{64}$

$y(t) = 60 - \left(\frac{27}{64}\right)^t .60 \Rightarrow y(3) = 60 - \left(\frac{27}{64}\right)^3 .60 = 55{,}5$

$y(2) = 60 - \left(\frac{27}{64}\right)^2 .60 = 49{,}3$

Ejercicios Generales Resueltos

1) Calcular $d^2 f$ en $x = e$ con $\Delta x = 0{,}1$ si f pertenece a la familia de funciones: $\int x^{ln\,x}.dx = f(x) + C$

Buscamos primero df: $d\,[f(x) + C] = d\,f(x) = d \int x^{ln\,x}.dx = x^{ln\,x}.dx$

$\Rightarrow d^2 f(x) = d\,[df(x)] = d\,[x^{ln\,x}.dx] = x^{ln\,x}.\frac{2\,ln\,x}{x}.dx^2 =$

$= x^{ln\,x-1}.\,ln^2 x.dx^2$, en $x = e$ con $\Delta x = 0{,}1$: $d^2 f(e) = 1.2.0{,}01 = 0{,}02$.

2) Demostrar que si $a \neq 0$

$$\int f(x).dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(a\,x+b).dx = \frac{1}{a}.F(a\,x+b) + C$$

Debemos calcular $\int f(a\,x+b).dx$, lo hacemos por sustitución:

$ax + b = t \Rightarrow dx = \frac{dt}{a} \Rightarrow \int f(a\,x+b).dx = \int f(t).\frac{dt}{a} =$

$= \frac{1}{a}.F(t) + C = \frac{1}{a}.F(a\,x+b) + C$

3) En la ecuación $f'(x) = 4x^3 + 2x - 20$ si el punto (5;200) pertenece a la gráfica de f, determinar f.

$$f(x) = \int (4x^3 + 2x - 20).dx = x^4 + x^2 - 20\,x + C.$$

Vemos que hay infinitas funciones f, pero hay una sola que pasa por el punto (5;200). Falta determinar la constante C.

$200 = 5^4 + 5^2 - 20.5 + C \Rightarrow C = -350 \Rightarrow f(x) = x^4 + x^2 - 20x - 350$

4) Determinar la función $f(x)$ si la recta normal al gráfico de f en $x_0=1$ es $6y+x=37$ y $f''(x)=6x+2$.

$$6y+x=37 \Rightarrow y_n=-\frac{x}{6}+\frac{37}{6} \therefore f'(1)=6 \text{ y } f(1)=y_n(1)=6$$

$$f'(x)=\int f''(x)dx=\int(6x+2).dx=3x^2+2x+C$$

Como $f'(1)=6 \Rightarrow 6=5+C \therefore C=1$

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2+2x+1).dx=x^3+x^2+x+C$$

Como $f(1)=6 \Rightarrow 6=3+C \therefore C=3, \quad f(x)=x^3+x^2+x+3$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Resolver las siguientes integrales

Inmediatas

1. $\int(1+x).dx$ 2. $\int\left(1-\sqrt{x}\right)^2.dx$ 3. $\int(2+x)^2.dx$

4. $\int x.\sqrt{x}.dx$ 5. $\int\frac{1-x^5}{1-x}.dx$ 6. $\int\left(4\cos x-\frac{1}{\cos^2 x}\right).dx$

7. $\int\frac{3}{x^3}.dx$ 8. $\int\frac{1+x^2}{\sqrt{x}}.dx$ 9. $\int\frac{4}{1+x}.dx$

10. $\int\frac{2x}{1+x^2}.dx$ 11. $\int\cos x.sen^3x.dx$ 12. $\int tg^5x.sec^2x.dx$

13. $\int\frac{e^x.sen\,e^x}{\cos e^x}.dx$ 14. $\int\frac{x^2}{2+2x^3}.dx$ 15. $\int\frac{2x+1}{x^2+x-1}.dx$

16. $\int tg^2x.dx$ 17. $\int-3\cos^5x.sen\,x.dx$ 18. $\int\frac{1+x}{1+x^2}.dx$

19. $\int\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)^2}{\sqrt{x}}.dx$ con $a\geq 0$

Por sustitución

1. $\int(1-3x)^5.dx$ 2. $\int\frac{x-3}{x^2-6x+4}.dx$ 3. $\int x.\sqrt{x^2+1}.dx$

4. $\int\frac{e^{1/x}}{x^2}.dx$ 5. $\int e^{3x}.dx$ 6. $\int 4^{2-3x}.dx$

7. $\int\frac{x^2}{\sqrt{x^3+2}}.dx$ 8. $\int\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}.dx$ 9. $\int\frac{x^2}{1+x^6}.dx$

10. $\int\frac{dx}{9-4x^2}$ 11. $\int\sqrt[3]{\left(x^2+x\right)^2}.(2x+1).dx$ 12. $\int(ln\,x)^{-2}.\frac{dx}{x}$

13. $\int\frac{dx}{x.(ln\,2x)^3}$ 14. $\int\cos^3(2x).sen\,(2x).dx$ 15. $\int\frac{ln(x+2).dx}{x+2}$

16. $\int (tg\,(3x).sec\,(3x))^2.dx$ 17. $\int \frac{ln\,(ln\,x).dx}{x.ln\,x}$ 18. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}-3}{\sqrt{x}}.dx$

19. $\int \sqrt{\frac{e^{Arg\,Sh\,x}}{x^2+1}}.dx$ 20. $\int \frac{dx}{4+x^2}$ 21. $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$

22. $\int \frac{5.dx}{x^2-8x+25}$ 23. $\int \frac{dx}{16-x^2}$ 24. $\int \frac{dx}{x^2-9}$

25. $\int \frac{dx}{x^2-8x+7}$ 26. $\int \frac{(2x-3).dx}{x^2-6x+10}$ 27. $\int \frac{(2x+1).dx}{4x^2+12x+13}$

28. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$ 29. $\int \frac{dx}{\sqrt{8+4x-4x^2}}$ 30. $\int \frac{dx}{\sqrt{16+x^2}}$

31. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-25}}$ 32. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$ 33. $\int \frac{(2x-1).dx}{\sqrt{4x^2+4x-2}}$

Por partes

1. $\int x.e^x.dx$ 2. $\int x.sen\,x.dx$ 3. $\int x.cos\,x.dx$

4. $\int ln\,x.dx$ 5. $\int x^2.ln\,x.dx$ 6. $\int arc\,tg\,x.dx$

7. $\int x^2.e^x.dx$ 8. $\int e^x.sen\,x.dx$ 9. $\int cos\,(ln\,x).dx$

10. $\int sen\,x.\,Sh\,x.dx$ 11. $\int x.^2 sen\,x.dx$ 12. $\int arc\,cos\,x.dx$

13. $\int arc\,tg\,\sqrt{x}.dx$ 14. $\int x.\,Sh\,x.dx$ 15. $\int \frac{arc\,tg\,x}{x^2}.dx$

16. $\int x.cos\,(3x).dx$ 17. $\int sec^3x.dx$ 18. $\int x.arc\,tg\,x.dx$

Por descomposición en fracciones simples

1. $\int \frac{2x-1}{x^2-3x+2}.dx$ 2. $\int \frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}.dx$ 3. $\int \frac{x-1}{x^3-x^2-2x}.dx$

4. $\int \frac{3x+2}{x^2-4x+3}.dx$ 5. $\int \frac{2}{x^3-4x}.dx$ 6. $\int \frac{x^2}{(x-3).(x-2).(x-1)}.dx$

7. $\int \frac{dx}{x^2-25}$ 8. $\int \frac{x^4+4x^3-x}{x^2+2x-3}.dx$ 9. $\int \frac{2x.dx}{x^2-10x+25}$

10. $\int \frac{dx}{x^2.(x-2)^2}$ 11. $\int \frac{(2x-1).dx}{(x-1)^2.(x+3)}$ 12. $\int \frac{3.dx}{x^4+2x^3+x^2}$

13. $\int \frac{-2x^2+2x-1}{x^3.(x-1)}.dx$ 14. $\int \frac{(x+1).dx}{x.(x^2+1)}$ 15. $\int \frac{x^4+4x^3-x}{x^2+2x-3}.dx$

16. $\int \frac{dx}{x.(x^2+4)}$ 17. $\int \frac{x^2+1}{x^2-1}.dx$ 18. $\int \frac{x^3-2x^2+3x-8}{(x^2+4)^2}.dx$

Trigonométricas

1. $\int sen^2x.dx$ 2. $\int cos^2x.dx$ 3. $\int sen^3x.dx$

4. $\int cos^5x.dx$ 5. $\int cos^4x.dx$ 6. $\int sen^2x.cos^3x.dx$

7. $\int cos^2x.sen^5x.dx$ 8. $\int sen^2x.cos^2x.dx$ 9. $\int cos^2(3x).sen^4(3x).dx$

10. $\int sec^3x.tg^5x.dx$ 11. $\int tg^4x.dx$ 12. $\int tg^3x.sec^3x.dx$

Irracionales

1. $\int \frac{1}{x-4\sqrt{x+5}}.dx$ 2. $\int \frac{2x}{1+\sqrt{x+1}}.dx$ 3. $\int x.\sqrt{x+1}.dx$

4. $\int \frac{x}{3+\sqrt{x}}.dx$ 5. $\int \frac{x}{\sqrt{2x-1}}.dx$ 6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-x}$

Aplicando alguno de los métodos vistos

1. $\int \frac{cos\,x+3}{sen^2x}.dx$ 2. $\int \frac{e^{3x}+3e^x-2e^{-4x}}{e^{5x}}.dx$

3. $\int \sqrt{x+3}.(2x-\sqrt{x}+2).dx$ 4. $\int \frac{sec^2x+tg\,x}{sec^2x}.dx$

5. $\int \frac{x+5}{x^3+2x^2-x-2}.dx$ 6. $\int (x-2).sen\,x.dx$

7. $\int \frac{x^{-1}}{(ln\,x-3).(ln\,x-2)}.dx$ 8. $\int x.(2x+5)^{10}.dx$

9. $\int \frac{x^6-3x^3+x^2-2}{x-1}.dx$ (sugerencia: reemplazar el polinomio del numerador por un polinomio de Taylor conveniente).

Ecuaciones diferenciales

1. Resolver: $f'(x)=e^x.(x^2+4x+3)$ con $f(0)=2$.

2. Representar gráficamente la solución de la ecuación: $y'.y+x=0$ con $y(0)=2$.

Problemas

1. Determinar la ecuación de la gráfica de $y=f(x)$ si pasa por el punto (–1;2) en el cual la recta tangente es horizontal y si además se verifica que: $y''=3x^2+2x-1$.

2. Determinar la función $y=f(x)$ tal que la pendiente de la recta tangente a su gráfica en todo punto sea igual al doble de la abscisa menos 4 y que $f(0)=1$.

3. La función f es derivable por lo menos hasta orden 2. Simplificar la expresión: $\int [\cos x.f'(x)+sen\,x.f(x)].dx$.

4. Hallar la función $y=f(x)$ si pasa por el punto A = (1; –1), en el cual la recta tangente forma un ángulo de 45° con el eje x y su derivada segunda en un punto cualquiera es igual al recíproco de su abscisa.

5. Al sacar una torta del horno, su temperatura es de 180 °C. Después de 3 minutos, su temperatura es de 120 °C. ¿En cuánto tiempo se enfriará hasta la temperatura ambiente de 22 °C?

RESPUESTAS

Inmediatas

1. $x+\frac{x^2}{2}+C$ 2. $x-\frac{4}{3}x^{3/2}+\frac{x^2}{2}+C$ 3. $4x+2x^2+\frac{x^3}{3}+C$

4. $\frac{2}{5}x^{5/2}+C$ 5. $\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+C$ 6. $4\,sen\,x-tg\,x+C$

7. $-\frac{3}{2x^2}+C$ 8. $2\sqrt{x}+\frac{2}{5}x^{5/2}+C$ 9. $4\,ln|1+x|+C$

10. $ln(1+x^2)+C$ 11. $\frac{sen^4 x}{4}+C$ 12. $\frac{tg^6 x}{6}+C$

13. $-ln\cos e^x+C$ 14. $\frac{ln\,|2+2x^3|}{6}+C$ 15. $ln|x^2+x-1|+C$

16. $tg\,x-x+C$ 17. $\frac{\cos^6 x}{2}+C$ 18. $arc\,tg\,x+\frac{1}{2}ln|1+x^2|+C$

19. $\frac{2}{3}x^{2/3}+2\sqrt{a}\,x+2a\sqrt{x}+C$

Por sustitución

1. $-\frac{1}{18}(1-3x)^6+C$ 2. $\frac{ln\,|x^2-6x+4|}{2}+C$ 3. $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}+C$

4. $-e^{1/x}+C$ 5. $\frac{e^{3x}}{3}+C$ 6. $\frac{-4^{2-3x}}{3.ln\,4}+C$

7. $\frac{2}{3}\sqrt{x^3+2}+C$ 8. $\frac{arc\,sen(2x)}{2}+C$ 9. $\frac{1}{3}arc\,tg\,x^3+C$

10. $\frac{Arg\ Th\left(\frac{2}{3}x\right)}{6}+C$ 11. $\frac{3}{5}(x^2+x)^{5/3}+C$ 12. $-(ln\,x)^{-1}+C$

13. $-\frac{1}{2\,ln^2(2x)}+C$ 14. $-\frac{\cos^4(2x)}{8}+C$ 15. $\frac{ln^2|x+2|}{2}+C$

16. $\frac{tg^3(3x)}{9}+C$ 17. $\frac{ln^2(ln\,x)}{2}+C$ 18. $2e^{\sqrt{x}}-6\sqrt{x}+C$

19. $2\,e^{\frac{Arg\,Sh\,x}{2}}+C$ 20. $\frac{arc\,tg\,\frac{x}{2}}{2}+C$ 21. $\frac{1}{2}\,arc\,tg\,\frac{x+1}{2}=C$

22. $\frac{5}{3}\,arc\,tg\,\frac{x-4}{3}+C$ 23. $\frac{1}{4}\,Arg\,Th\,\frac{x}{4}+C$ 24. $-\frac{1}{3}\,Arg\,Th\,\frac{x}{3}+C$

25. $-\frac{1}{3}\,Arg\,Th\,\frac{x-4}{3}+C$ 26. $ln\left|x^2-6x+10\right|+3\,arc\,tg\,(x-3)+C$

27. $\frac{1}{4}\,ln\left|4x^2+12x+13\right|-\frac{1}{2}\,arc\,tg\left(x+\frac{3}{2}\right)+C$ 28. $arc\,sen\,\frac{x}{3}+C$

29. $\frac{1}{2}\,arc\,sen\,\frac{2x-1}{3}+C$ 30. $Arg\,Sh\,\frac{x}{4}+C$ 31. $Arg\,Ch\,\frac{x}{5}+C$

32. $arc\,sen\,(x-2)+C$ 33. $\frac{1}{2}\,\sqrt{4x^2+4x+2}-Arg\,Sh\,(2x+1)+C$

Por partes

1. $x.e^x-e^x+C$ 2. $-x.\cos x+sen\,x+C$
3. $x.sen\,x+\cos x+C$ 4. $x.ln\,x-x+C$
5. $\frac{x^3}{3}.ln\,x-\frac{x^3}{9}+C$ 6. $x.arc\,tg\,x-\frac{ln\left(x^2+1\right)}{2}+C$
7. $e^x.\left(x^2-2x+2\right)+C$ 8. $\frac{e^x.(-\cos x+sen\,x)}{2}+C$
9. $\frac{x.(\cos ln\,x+sen\,ln\,x)}{2}+C$ 10. $\frac{sen\,x.Ch\,x-\cos x.Sh\,x}{2}+C$

11. $-x^2.\cos x+2x.sen\,x+2\cos x+C$ 12. $x.arc\,\cos x-\sqrt{1-x^2}+C$
13. $x.arc\,tg\,\sqrt{x}-\sqrt{x}+arc\,tg\,\sqrt{x}+C$ 14. $x.Ch\,x-Sh\,x+C$
15. $-\frac{arc\,tg\,x}{x}+ln|x|-\frac{ln\left(1+x^2\right)}{2}+C$ 16. $\frac{x.sen\,(3x)}{3}+\frac{x.\cos\,(3x)}{9}+C$
17. $\frac{sec\,x.tg\,x+ln|sec\,x+tg\,x|}{2}+C$ 18. $\frac{x^2}{2}.arc\,tg\,x-\frac{x}{2}+\frac{arc\,tg\,x}{2}+C$

Por descomposición en fracciones simples

1. $3\,ln|x-2|-ln|x-1|+C$ 2. $-\frac{3}{2}\,ln|x|+\frac{5}{3}\,ln|x-1|-\frac{1}{6}\,ln|x+2|+C$

3. $\frac{1}{2}\,ln|x|-\frac{2}{3}\,ln\,|x+1|+\frac{1}{6}\,ln|x-2|+C$ 4. $-\frac{5}{2}\,ln|x-1|+\frac{11}{2}\,ln|x-3|+C$

5. $-\frac{1}{2}\,ln|x|+\frac{1}{4}\,ln|x-2|+\frac{1}{4}\,ln|x+2|+C$

6. $\frac{9}{2}\,ln|x-3|-4\,ln|x-2|+\frac{1}{2}\,ln|x-1|+C$

7. $-\frac{1}{10}\,ln|x+5|+\frac{1}{10}\,ln|x-5|+C$

8. $\frac{x^3}{3}+x^2-x+6\,ln|x+3|+ln|x-1|+C$

9. $2\,ln|x-5|-\frac{10}{x-5}+C$ 10. $\frac{1}{4}\,ln|x|-\frac{1}{4x}-\frac{1}{4}\,ln|x-2|-\frac{1}{4(x-2)}+C$

11. $\frac{7}{16}\,ln|x-1|-\frac{1}{4(x-1)}-\frac{7}{16}\,ln|x+3|+C$

12. $-6\,ln|x|-\frac{3}{x}+6\,ln\,|x+1|-\frac{3}{x+1}+C$

13. $ln|x|-ln|x-1|+\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+C$ 14. $ln|x|-\frac{1}{2}\,ln\left|x^2+1\right|+arc\,tg\,x+C$

15. $\frac{1}{3}x^3+x^2-x+6\,ln|x+3|+ln|x-1|+C$

16. $\frac{1}{4}\,ln|x|-\frac{1}{8}\,ln\left|x^2+4\right|+C$ 17. $x+ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$

18. $\frac{1}{2\left(x^2+4\right)}+\frac{ln\left|x^2+4\right|}{2}-\frac{1}{2}\,arc\,tg\,\frac{x}{2}+C$

Trigonométricas

1. $\frac{x}{2}-\frac{sen\,(2x)}{4}+C$ 2. $\frac{x}{2}+\frac{sen\,(2x)}{4}+C$

3. $-\cos x+\frac{\cos^3 x}{3}+C$ 4. $\operatorname{sen} x-\frac{2\operatorname{sen}^3 x}{3}+\frac{\operatorname{sen}^5 x}{5}+C$

5. $\frac{3}{8}x+\frac{\operatorname{sen}(2x)}{4}+\frac{\operatorname{sen}(4x)}{32}+C$ 6. $\frac{\operatorname{sen}^5 x}{3}-\frac{\operatorname{sen}^5 x}{5}+C$

7. $-\frac{\cos^3 x}{3}+\frac{2\cos^5 x}{5}-\frac{\cos^7 x}{7}+C$ 8. $\frac{x}{8}-\frac{\operatorname{sen}(4x)}{32}+C$

9. $\frac{x}{16}-\frac{\operatorname{sen}(12x)}{192}-\frac{\operatorname{sen}^3(6x)}{144}+C$ 10. $\frac{\sec^7 x}{7}-\frac{2\sec^5 x}{5}+\frac{\sec^3 x}{3}+C$

11. $\frac{tg^3 x}{3}-tg\,x+x+C$ 12. $\frac{\sec^5 x}{5}-\frac{\sec^3 x}{3}+C$

Irracionales

1. $\frac{5}{3}.\ln\left|\sqrt{x+5}-5\right|+\frac{1}{3}\ln\left|\sqrt{x+5}+1\right|+C$ 2. $\frac{4}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3-2(x+1)+C$

3. $\frac{2}{5}\left(\sqrt{x+1}\right)^5-\frac{2}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3+C$

4. $\frac{2}{3}x^{3/2}-3x+18\sqrt{x}-54\ln\left(3+\sqrt{x}\right)+C$

5. $\frac{1}{6}\sqrt{(2x-1)^3}+\frac{1}{2}\sqrt{2x-1}+C$ 6. $\ln\left|1-\sqrt{x}\right|^{-2}+C$

Por algún método

1. $\operatorname{cosec} x-3\,tg\,x+C$ 2. $-\frac{e^{-2x}}{2}-\frac{3e^{-4x}}{4}+\frac{2e^{-9x}}{9}+C$

3. $\frac{4x^{5/2}}{5}+\frac{5x^2}{2}-\frac{2x^{3/2}}{3}+6x+C$ 4. $x+\frac{\operatorname{sen}^2 x}{2}+C$

5. $\ln|x-1|-2\ln|x+1|+\ln|x+2|+C$ 6. $\operatorname{sen} x-(x-2).\cos x+C$

7. $\ln\frac{|\ln x-3|}{|\ln x-2|}+C$ 8. $\frac{(2x+5)^{12}}{48}-\frac{5(2x+5)^4}{44}+C$

9. $-3x-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{7(x-1)^3}{3}+\frac{17(x-1)^4}{4}+3(x-1)^5+(x-1)^6+\frac{(x-1)^7}{7}+C$

Ecuaciones diferenciales

1. $f:\Re\to\Re\,/\,f(x)=e^x.(x+1)^2+1$

2. $x^2+y^2=4$, Circunferencia de centro (0;0) y radio 2.

Problemas

1. $f:\Re\to\Re\,/\,f(x)=\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-x+\frac{19}{12}$

2. $f:\Re\to\Re\,/\,f(x)=x^2-4x+1$

3. $f(x).\cos x+C$ 4. $f(x)=x.\ln x-1$

5. A los 50 minutos la temperatura es T = 22,05 °C

Capítulo 11

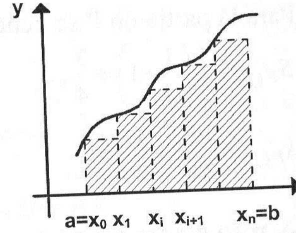
Integral definida

Propiedades.
Teorema del valor medio del cálculo integral.
Función integral.
Teorema fundamental del cálculo integral.
Regla de Barrow.
Área entre dos curvas.

Integrales impropias de 1º especie.
Integrales impropias de 2º especie.
Algunas integrales impropias famosas.
La función Gamma.
Curva de distribución normal.

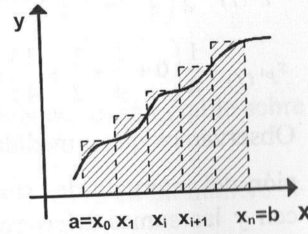
INTEGRAL DEFINIDA

Concepto



Se plantea el problema de calcular el área debajo de la gráfica correspondiente a una función f que por el momento consideramos continua y positiva en el intervalo $[a;b]$.

A los efectos de calcular el área efectuamos una partición del intervalo $[a;b]$ en un número finito de subintervalos, cada uno de amplitud Δx_i y consideramos en cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$ con $1 \leq i \leq n$ los rectángulos con base en dichos subintervalos y alturas m_i y M_i respectivamente, donde:



$m_i = \text{Inf}\ \{ f(x), x \in [x_i , x_{i+1}]\}$
$M_i = \text{Sup}\ \{ f(x), x \in [x_i , x_{i+1}]\}$

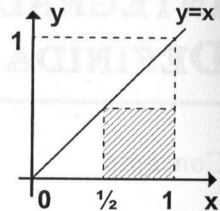
Si consideramos la función $f : [a;b] \to \Re$ acotada y la partición $P\ [x_0 ; x_1; ... ; x_n]$. Se define como suma superior para f correspondiente a la partición P:

$$S_{P(f)} = \sum_{i=0}^{n} M_i \left(x_{i+1} - x_i\right)$$ y como suma inferior:

$$s_{P(f)} = \sum_{i=0}^{n} m_i \left(x_{i+1} - x_i\right)$$ que aproximan por exceso y por defecto al área buscada. En estas condiciones es: $s_{P(f)} \leq A \leq S_{P(f)}$.

Ejemplo

Sea $f: [0;1] \to \Re \,/\, f(x) = x$. Hallar las sumas superiores e inferiores correspondientes a las particiones que se indican a continuación:

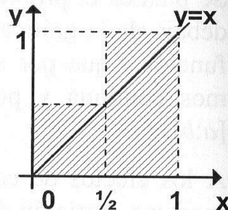


a) P [0;0,5;1]

Para la partición P se tiene:

$$S_{P(f)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{3}{4},$$

$$s_{P(f)}=\frac{1}{2}\left(0+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$$

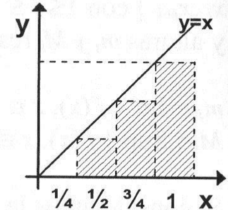


b) P' [0;0,25;0,5;0,75;1]

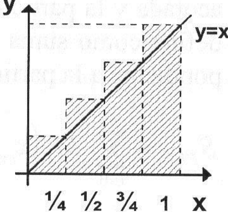
Considerando la partición P' (que es más fina que la partición P) resulta:

$$S_{P^1(f)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+1\right)=\frac{5}{8}$$

$$s_{P^1(f)}=\frac{1}{4}\left(0+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{8}$$



Observamos que a medida que se afina la partición del intervalo, las sumas superiores decrecen y las sumas inferiores crecen, aproximándose al verdadero valor del área que en este caso es: $A=\frac{1}{2}$.



Si consideramos el supremo de las sumas inferiores y el ínfimo de las sumas superiores:

$I_1 = Sup\,\{s_{P(f)} \,/\, P \text{ es partición de } [a,b]\}$.

$I_2 = Inf\,\{S_{P(f)} \,/\, P \text{ es partición de } [a,b]\}$.

decimos que la función f es integrable sobre el intervalo $[a;b]$, si los valores coinciden: $I_1 = I_2 = \int_a^b f(x).dx$.

Ejemplo

Probar que $f: [a,b] \to \Re \,/\, f(x) = k$ es integrable sobre el intervalo $[a;b]$.

Para la partición genérica de $[a;b]$: P $[x_0, x_1, ..., x_n]$ resulta:

$$S_{P(f)}=\sum_{i=0}^{n} k\,(x_{i+1}-x_i)=k\sum_{i=0}^{n}(x_{i+1}-x_i)$$

desarrollando la suma, se obtiene:

$$S_{P(f)}=k\,(x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + ... + x_n)$$

finalmente: $S_{P(f)}=k\,(x_n - x_0)=k\,(b-a)$

análogamente: $s_{P(f)}=\sum_{i=0}^{n} m_i\,(x_{i+1}-x_i)=k\,(b-a)$

por tanto la función constante es integrable sobre $[a,b]$ y

$$\int_a^b k.dx = k\,(b-a)$$

Propiedades

i) Si $f: [a;b] \to \Re$ es continua en $[a,b]$, entonces es integrable sobre dicho intervalo.

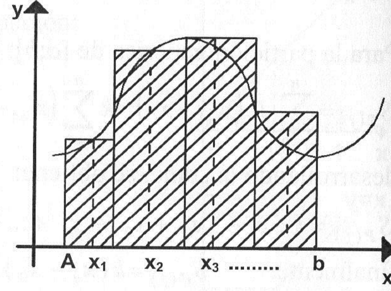
ii) Si $f: [a;b] \to \Re$ está acotada y es continua salvo en un número finito de puntos, entonces es integrable en $[a,b]$.

iii) Si $f: [a;b] \to \Re$ es integrable en $[a,b]$, entonces $|f|$ es integrable sobre dicho intervalo.

iv) Si $f: [a;b] \to \Re$ es integrable en $[a,b]$, entonces f^2 es integrable sobre dicho intervalo.

Otra forma

Dividimos el intervalo $[a;b]$ en **n** subintervalos, cada uno de amplitud Δx_i y consideramos de cada subintervalo un punto interior x_i al cual le corresponde un valor de la función $f(x_i)$.



El área de cada rectángulo se obtiene multiplicando cada $f(x_i)$ por cada Δx_i. La suma de las áreas de los rectángulos da un valor aproximado del área bajo la curva, con x entre a y b.

Área aproximada $= \sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x_i$.

Si la partición se hace más fina, esta sumatoria se aproxima cada vez más al área real.

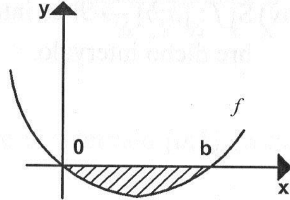
$$\textbf{Área} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x_i = \int_a^b f(x).dx$$

Se define como integral definida entre a y b al límite, cuando cada $\Delta x_i \to 0$, de la suma de los productos entre los $f(x_i)$ y los Δx_i.

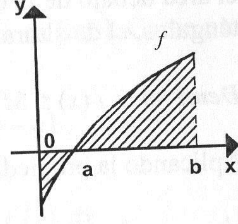
Nota: si $f(x)$ es negativa, la integral definida es negativa y por lo tanto no mide el área, el valor de ésta es el valor absoluto de la integral definida $A = \left| \int_a^b f(x).dx \right|$ o $A = -\int_a^b f(x).dx$.

Ejemplos:

a) En $[0;b]$ la función es negativa, el área es $A = -\int_0^b f(x).dx$ o $A = \left| \int_0^b f(x).dx \right|$.



b) Esta región se divide en dos regiones, la que corresponde a $[0;a]$ y la correspondiente a $[a;b]$:



$$A = -\int_0^a f(x).dx + \int_a^b f(x).dx$$

$$\text{o } A = \left| \int_0^a f(x).dx \right| + \int_a^b f(x).dx$$

En estos casos $\int_0^b f(x).dx$ no mide el área de la región rayada.

Propiedades de la integral definida

1) Propiedad aditiva: $\int_a^b f(x).dx = \int_a^c f(x).dx + \int_c^b f(x).dx \quad c \in (a;b)$

2) Los factores se pueden extraer de la integral

$$\int_a^b k.f(x).dx = k.\int_a^b f(x).dx$$

3) La integral definida de una suma algebraica de funciones es igual a la suma algebraica de las integrales definidas

$$\int_a^b [f(x)+g(x)-h(x)].dx = \int_a^b f(x).dx + \int_a^b g(x).dx - \int_a^b h(x).dx$$

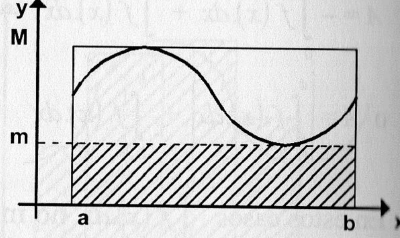
4) Si se permutan los extremos de integración, se obtiene el número opuesto: $\int_a^b f(x).dx = -\int_b^a f(x).dx$ y $\int_a^a f(x).dx = 0$

5) $\forall x \in [a,b]$: $f(x) \le g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

6) Si f es integrable sobre $[a;b]$ y $m \le f(x) \le M$ entonces:

$$m.(b-a) \le \int_a^b f(x).dx \le M.(b-a)$$

Lo que quiere decir que, para el caso de una función positiva en $[a,b]$, el área debajo de la curva está comprendida entre las áreas de dos rectángulos, el de altura **m**, y el de altura **M**.



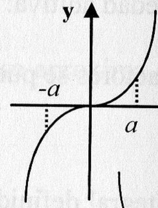
Dem: $m \le f(x) \le M$

Aplicando la propiedad 5) se tiene:

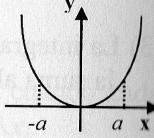
$$\int_a^b m.dx \le \int_a^b f(x).dx \le \int_a^b M.dx$$

ya se probó que la función constante es integrable y se encontró su integral indefinida, por tanto: $m(b-a) \le \int_a^b f(x).dx \le M(b-a)$.

7) a) Si $f(x)$ es impar, entonces $\int_{-a}^{a} f(x).dx = 0$



b) Si $f(x)$ es par, entonces $\int_{-a}^{a} f(x).dx = 2\int_0^a f(x).dx$



Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral

*Si **f** es continua en un intervalo* $[a;b]$ *entonces* $\exists c \in (a;b)$ /

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x).dx.$$

$f(c)$ se denomina valor medio de f en $[a;b]$.

El teorema afirma que la integral definida de una función continua en un intervalo $[a;b]$ es igual a la amplitud del intervalo por un valor entre **m** y **M**.

Demostración

Sean **m** y **M** los extremos absolutos de la función en $[a;b]$. Como una función continua es integrable, por propiedad 6:

$$m.(b-a) \le \int_a^b f(x).dx \le M.(b-a)$$

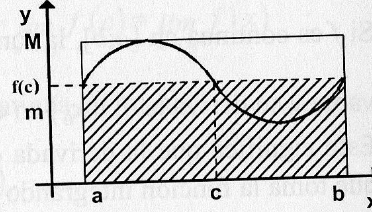
por ser $b-a>0$, dividiendo por $b-a$: $m \le \dfrac{\int_a^b f(x).dx}{b-a} \le M$.

$k = \dfrac{\int_a^b f(x).dx}{b-a}$ es un número entre **m** y **M** $\Rightarrow \exists\, c \in (a;b) \,/\, f(c) = k$,

(por el teorema del valor intermedio para funciones continuas), entonces $\exists\, c \in (a;b) \,/\, f(c) = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x).dx$.

Interpretación geométrica

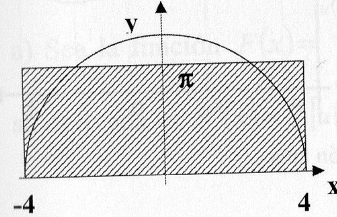
Si f es una función continua y positiva, el área es igual al área de un rectángulo cuya base es $(b-a)$ y cuya altura es $f(c)$.



$$\int_a^b f(x).dx = f(c).(b-a)$$

Ejemplo: hallar el valor medio de $y = \sqrt{16-x^2}$ en $[-4;4]$

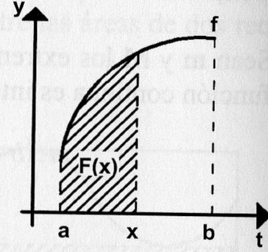
$$f(c) = \sqrt{16-c^2} = \frac{1}{8}\int_{-4}^{4}\sqrt{16-x^2} = \frac{1}{8}\,\textit{Área del semicírculo} = \frac{1}{8}.\frac{16}{2}\pi = \pi$$



Geométricamente significa que el área del semicírculo se puede expresar como el área de un rectángulo de base 8 y altura π.

FUNCIÓN INTEGRAL

Consideremos en la integral definida $\int_a^b f(t).dt$ el límite superior variable (x). La integral es función del límite superior del intervalo.



$$F(x)=\int_a^x f(t).dt$$

F se llama *función integral*[1] y su valor depende del extremo superior x.

$F(a)=\int_a^a f(t).dt=0$ y $F(b)=\int_a^b f(t).dt$

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL

Relaciona la integral definida con la integral indefinida.

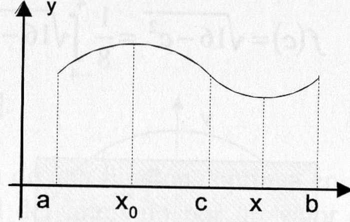
Si f es continua en $[a;b]$, la función integral $F(x)=\int_a^x f(t).dt$ es derivable y su derivada $F'(x_0)$ en cualquier punto $x_0\in[a;b]$ es $f(x_0)$.
Esto significa que la derivada de la función integral es igual al valor que toma la función integrando en el extremo x_0: $F'(x_0)=f(x_0)$.

Demostración

Usamos la definición de derivada. Calculamos el cociente incremental:

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\frac{\int_a^x f(t).dt-\int_a^{x_0} f(t).dt}{x-x_0}$$

con $a<x_0<x$



[1] Si $f(x)$ es no negativa, se denomina también función área.

Por propiedad aditiva de la integral definida:

$$\int_a^x f(t).dt=\int_a^{x_0} f(t).dt+\int_{x_0}^x f(t).dt\Rightarrow\int_a^x f(t).dt-\int_a^{x_0} f(t).dt=\int_{x_0}^x f(t).dt\Rightarrow$$

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\frac{\int_{x_0}^x f(t).dt}{x-x_0}$$

Por teorema del valor medio del cálculo integral:

$\exists c\in(x_0;x)\,/\,f(c)=\frac{1}{x-x_0}.\int_{x_0}^x f(t).dt\Rightarrow\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=f(c)$, con $x_0<c<x$

Calculamos ahora la derivada de $F(x)$:

$$F'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0} f(c)=\lim_{x\to x_0} f(x)$$

Cuando $x\to x_0$, $c\to x_0$. Como f es continua en $[a;b]$ el

$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\Rightarrow F'(x_0)=f(x_0)$.

Ejemplo: Si $F(x)=\int_1^x sen^2\,t.dt$, hallar $F'(\pi)$

$F'(x)=sen^2\,x\Rightarrow F'(\pi)=sen^2\pi=0$.

Propiedades

a) Sea la función $F(x)=\int_a^{u(x)} f(t).dt$, por ser una función compuesta, su derivada es $F'(x)=f[u(x)].u'(x)$.

Ejemplos

i) Si $F(x)=\int_1^{x^3} sen\,t.dt$, entonces $F'(x)=3x^2.sen\,x^3$

ii) Si $F(x)=\int_1^{x^2} arc\,tg\,t.dt$, hallar $F'(1)$

$$F'(x)=arc\,tg\,x^2.2x \Rightarrow F'(1)=(arc\;tg\;1).2=\frac{\pi}{4}.2=\frac{\pi}{2}$$

b) $F(x)=\int_{u_1(x)}^{u_2(x)} f(t).dt \Rightarrow F'(x)=f[u_2(x)].u_2'(x)-f[u_1(x)].u_1'(x)$

Ejemplo: $F(x)=\int_{x^2}^{x^3+2x} tg\,t.dt \Rightarrow F'(x)=tg\,(x^3+2x).(3x^2+2)-tg\,x^2.2x.$

REGLA DE BARROW

Si f (x) es continua en [a;b] y G(x) es una primitiva de f (x), entonces:

$$\int_a^b f(x).dx=G(b)-G(a)$$

Demostración

Por ser $G(x)$ una primitiva de $f(x)$, $\forall x$: $G'(x)=f(x)$. Si $F(x)$ es la función integral, $F(a)=\int_a^a f(t).dt=0, F(b)=\int_a^b f(t).dt$. Además $F'(x)=f(x)$, por lo tanto $F(x)$ y $G(x)$ son dos primitivas de $f(x)$ y por una propiedad de las funciones primitivas difieren en una constante $\Rightarrow \exists k$ / $F(x)=G(x)+k$.

Como $F(a)=0$, $G(a)+k=0 \Rightarrow k=-G(a)$. Por lo tanto:

$$F(b)=\int_a^b f(x).dx=G(b)+k=G(b)-G(a)$$

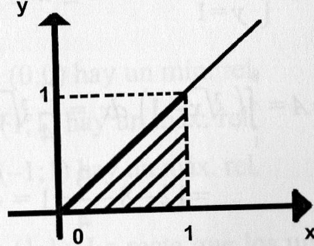
Para calcular la integral definida entre a y b basta con encontrar una primitiva cualquiera de f y restar los valores que toma en los extremos del intervalo.



BARROW, *Isaac (1634-1677):* nació en Londres, ciudad en la cual también murió. Fue profesor de Cambridge, donde en1669 renunció a la cátedra para que lo reemplazara Newton, quién había sido su alumno en esa misma cátedra, por considerarlo más digno que él para ser profesor. Luego se dedicó a la teología. Fue el primero en observar que el problema del trazado de la recta tangente a una curva en un punto y el cálculo del área limitada por esta curva son mutuamente inversos.

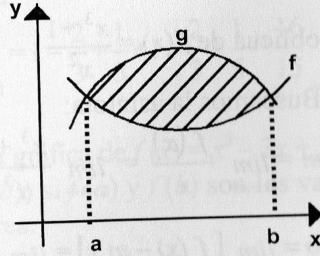
Ejemplo

$$\int_0^1 x.dx=\left.\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$$



ÁREA ENTRE DOS CURVAS

Se plantea el cálculo del área de una región plana limitada por dos curvas.

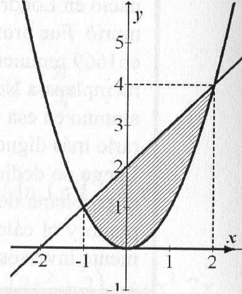


El área se puede calcular como resta de dos integrales definidas. $\int_a^b g(x).dx$, donde $g(x)$ es la curva que limita el recinto superiormente, y $\int_a^b f(x).dx$, donde $f(x)$ es la curva que limita

inferiormente. De donde se deduce que $A=\int_a^b\left[g(x)-f(x)\right].dx$, a y b son las abscisas de los puntos de intersección de las curvas.

Ejemplos

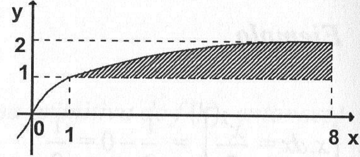
a) $\begin{cases} y=x^2 \\ y=x+2 \end{cases}$



$$A=\int_{-1}^{2}(x+2-x^2).dx=\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^3}{3}\Bigg]_{-1}^{2}=$$

$$=2+4-\frac{8}{3}-\frac{1}{2}+2-\frac{1}{3}=\frac{9}{2}$$

b) $\begin{cases} y^3=x \\ y=1 \end{cases}$ $\quad 1\le x\le 8$

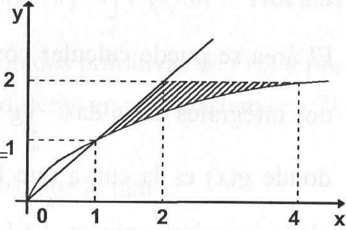


$$A=\int_1^8\left(\sqrt[3]{x}-1\right).dx=\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}-x\Bigg]_1^8=$$

$$=12-8-\frac{3}{4}+1=\frac{17}{4}$$

c) Calcular el área de la región limitada por $y^2=x$, $y=2$ y la asíntota oblicua de $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^2}$.

Buscamos la asíntota:



$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+1}{x^3}=1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-m\,x\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+1}{x^2}-x\right)=$$

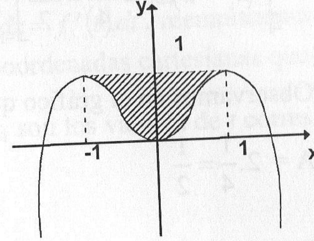
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$$

la asíntota es $y=x$.

$$A=\int_1^2\left(x-\sqrt{x}\right).dx+\int_2^4\left(2-\sqrt{x}\right).dx=\frac{x^2}{2}-\frac{2x^{3/2}}{3}\Bigg]_1^2+2x-\frac{2x^{3/2}}{3}\Bigg]_2^4=$$

$$=2-\frac{2}{3}\sqrt{8}-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+8-\frac{16}{3}-4+\frac{2}{3}\sqrt{8}=\frac{5}{6}$$

d) Dibujar la superficie plana limitada por la gráfica de $f(x)=2x^2-x^4$ y la recta que pasa por $(a;f(a))$ y $(b;f(b))$ si $f(a)$ y $f(b)$ son los valores máximos de f y hallar el área.



Primero calculamos los máximos:

$f'(x)=4x-4x^3 \Rightarrow 4x-4x^3=0 \quad \therefore\ 4x.(1-x^2)=0 \Rightarrow x_1=0,\ x_2=1,$ $x_3=-1$, son los puntos críticos.

$f''(x)=4-12x^2 \Rightarrow f''(0)=4>0 \Rightarrow$ en (0;0) hay un mín. rel.

$f''(1)=-8<0 \Rightarrow$ en (1;1) hay un máx. rel.

$f''(-1)=-8<0 \Rightarrow$ en (–1;1) hay un máx. rel.

Los máximos están en A = (–1;1) y en B = (1;1). La recta que los une es $y=1$.

$$A=\int_{-1}^{1}\left[1-\left(2x^2-x^4\right)\right].dx=x-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\Bigg]_{-1}^{1}=1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}+1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}=\frac{16}{15}$$

e) Dibujar la superficie plana limitada por la gráfica de $f(x)=x^3-3x+3$ y la recta que pasa por $(a;f(a))$ y $(b;f(b))$ si $f(a)$ y $f(b)$ son los valores máximo y mínimo de f, hallar el área.

$f'(x)=3x^2-3 \Rightarrow 3x^2-3=0 \Rightarrow x_1=1,\ x_2=-1$ son los puntos críticos.

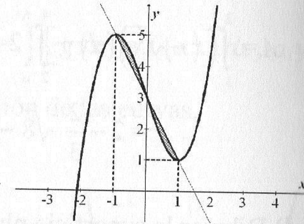
$f''(x)=6x \Rightarrow f''(1)=6>0 \Rightarrow$ en (1;1) hay un mín. rel.

$f''(-1)=-6<0 \Rightarrow$ en (–1;5) hay un máx. rel.

La recta que los une es $y = -2x + 3$.

$$A_1 = \int_{-1}^{0} \left[x^3 - 3x + 3 - (-2x + 3)\right] dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} \left(x^3 - x\right) dx = \left.\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} = 0 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

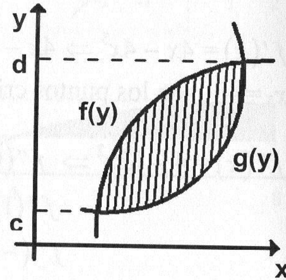


Observamos en el gráfico que el área es el doble de A_1

$$A = 2.\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Integración sobre el eje y

Si en lugar de plantear la región plana limitada por las gráficas de dos funciones del tipo $y = f(x)$, la planteamos como limitada por las gráficas de dos funciones del tipo $x = f(y)$, obtenemos la siguiente integral definida: $\int_c^d \left[g(y) - f(y)\right] dy \quad c \le y \le d$

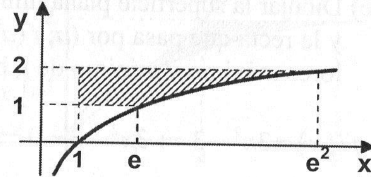


Si $\left[g(y) - f(y)\right] \ge 0$, entonces la integral representa el área de la región plana limitada por ambas gráficas.

Ejemplo: calcular el área limitada por las gráficas de $y = \ln x$, $y = 1$, $y = 2$, $x = 1$. $y = \ln x \Rightarrow x = e^y$

$$A = \int_1^2 \left(e^y - 1\right) dy = e^y - y\Big]_1^2 =$$

$$= e^2 - 2 - (e - 1) = e^2 - e - 1 \cong 3{,}67$$



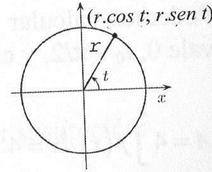
Integral definida en Coordenadas Paramétricas

Si una función está definida en forma paramétrica $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ vemos como se calcula la integral definida.

Si tenemos en cuenta que $y = g(t)$ y que $dx = f'(t).dt$, reemplazando en la fórmula de la integral definida para coordenadas cartesianas queda: $\int_a^b f(x).dx = \int_{t_0}^{t_1} g(t).f'(t).dt$, donde t_0 y t_1 son los valores de t correspondientes a los valores de $x = a$ y $x = b$.

Ejemplos

a) Área del círculo, $\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\,sen\,t \end{cases}$

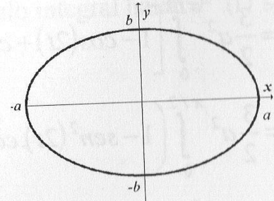


Podemos calcular ¼ del área y luego multiplicarla por 4. Cuando x vale 0, $t_0 = \pi/2$, y cuando $x = r$, $t_1 = 0$.

$$A = 4\int_0^r f(x).dx = 4\int_{\pi/2}^{0} r.sen\,t.r.(-sen\,t).dt = 4r^2\int_0^{\pi/2} sen^2\,t.dt =$$

$$4r^2.\left(\left.\frac{1}{2}t - \frac{sen(2t)}{4}\right]_0^{\pi/2}\right) = 4r^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{sen\,\pi}{4} - 0\right) = \pi r^2$$

b) Área interior de la elipse, $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\,sen\,t \end{cases}$

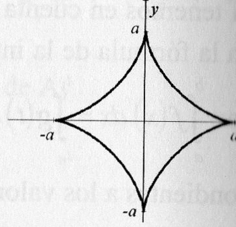


Podemos calcular ¼ del área y luego multiplicarla por 4. Cuando x vale 0, $t_0 = \pi/2$, y cuando $x = a$, $t_1 = 0$.

$$A = 4\int_0^a f(x).dx = 4\int_{\pi/2}^{0} b.sen\,t.a.(-sen\,t).dt = 4ab\int_0^{\pi/2} sen^2\,t.dt =$$

$$= 4ab.\left(\left[\frac{1}{2}t - \frac{sen(2t)}{4}\right]_0^{\pi/2}\right) = 4ab.\left(\frac{\pi}{4} - \frac{sen\,\pi}{4} - 0\right) = \pi\,ab$$

Área interior del astroide, $\begin{cases} x = a.cos^3\,t \\ y = a.sen^3\,t \end{cases}$



Podemos calcular ¼ del área y luego multiplicarla por 4. Cuando x vale 0, $t_0 = \pi/2$, y cuando $x = a$, $t_1 = 0$.

$$A = 4\int_0^a f(x).dx = 4\int_{\pi/2}^{0} a.sen^3\,t.3a.cos^2\,t.(-sen\,t).dt =$$

$$= 12a^2\int_0^{\pi/2} sen^4\,t.cos^2\,t.dt = 12a^2\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1-cos(2t)}{2}\right)^2.\left(\frac{1+cos(2t)}{2}\right).dt =$$

$$= \frac{3}{2}a^2\int_0^{\pi/2}\left[1-cos^2(2t)\right]\left[1-cos(2t)\right].dt =$$

$$= \frac{3}{2}a^2\int_0^{\pi/2}\left[1-cos(2t)+cos^3(2t)-cos^2(2t)\right]dt =$$

$$= \frac{3}{2}a^2\int_0^{\pi/2}\left[1-cos(2t)+cos(2t).(1-sen^2(2t)) - \frac{1+cos(4t)}{2}\right].dt =$$

$$= \frac{3}{2}a^2\int_0^{\pi/2}\left(1 - sen^2(2t).cos(2t) - \frac{1}{2} - \frac{cos(4t)}{2}\right).dt =$$

$$= \frac{3}{2}a^2.\left[\left(\frac{t}{2} - \frac{sen^3(2t)}{6} - \frac{sen(4t)}{8}\right)\right]_0^{\pi/2} = \frac{3}{2}a^2\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{3\pi a^2}{8}$$

Ejercicios Generales de Aplicación Resueltos

1) Hallar $c \in (1;3)$ / $\int_1^3 f(x).dx = 2.f(c)$ si $f(x) = x^2$

Es una aplicación del teorema del valor medio del cálculo integral:

$$\int_1^3 x^2.dx = \left.\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3} \Rightarrow 2c^2 = \frac{26}{3} \therefore c = 2{,}08 \in (1;3)$$

2) Encontrar el valor medio de $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+6}}$ en [0;3] utilizando el teorema del valor medio del cálculo integral.

$f(c) = \frac{1}{3}\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x^2+6}}.dx$, resolvemos la integral por sustitución:

$$u = x^2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2x} \therefore \int \frac{x}{\sqrt{x^2+6}}dx = \int \frac{x}{u^{1/2}}.\frac{du}{2x} = \frac{1}{2}\int u^{-1/2}du = u^{1/2}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+6}}dx = \sqrt{x^2+6} + C$$

$$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x^2+6}}.dx = \left.\sqrt{x^2+6}\right]_0^3 = \sqrt{15} - \sqrt{6} \cong 1{,}42 \Rightarrow f(c) = \frac{1{,}42}{3} = 0{,}47$$

3) Aplicando el teorema fundamental del cálculo integral hallar $F'(1)$ si

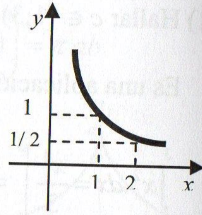
$$F(x) = \int_x^0 (t^2+1).dt.$$

$$F(x) = \int_x^0 (t^2+1)dt \Rightarrow F(x) = -\int_0^x (t^2+1)dt$$

$$F'(x) = -(x^2+1) \Rightarrow F'(1) = -2$$

4) Sin resolver la integral, pruebe que $0,5 \le \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \le 1$.

La función $f: [1,2] \to \Re \,/\, f(x)=\frac{1}{x}$ es continua en el intervalo [1,2].



El mínimo que alcanza la función en [1,2] es ½ y el máximo es 1. $m.(b-a) \le \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \le M.(b-a)$.

$\Rightarrow \frac{1}{2}.1 \le \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \le 1.1$. Finalmente $0,5 \le \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \le 1$.

5) Dada la función integral $F(x)=\int_1^{x^3} \sqrt[3]{t}\,dt$ hallar el polinomio de Taylor de grado 2 asociado a F alrededor del punto $a=1$.

$F(1)=\int_1^1 \sqrt[3]{t}\,dt = 0$ $\qquad F'(x)=\sqrt[3]{x^3}.3x^2 = 3x^3 \Rightarrow F'(1)=3$

$F''(x)=9x^2 \Rightarrow F''(1)=9$. Finalmente: $P_2(x)=3(x-1)+\frac{9}{2}(x-1)^2$

6) La ecuación $\int_0^y e^t.dt + \int_0^x cos\,t.dt = 0$ define en forma implícita a $y=f(x)$. Calcular y'.

Si llamamos F a la suma de las integrales y aplicamos el teorema fundamental del cálculo integral tenemos: $F' = e^y.y' + cos\,x = 0$, de donde surge que $y' = -\frac{cos\,x}{e^y}$.

7) Hallar por aproximación lineal $F(1,1)$ si $F(x)=2+\int_1^{x^2} \frac{10.dt}{1+t}$

$F'(x)=\frac{10}{1+x}.2x \Rightarrow F'(1)=10$. $y_t = 2+10.(x-1)=10x-8$

$F(1,1) \cong y_t(1,1)=3$

8) Si f es continua en $\Re$, con derivadas continuas hasta orden 2 inclusive y la recta tangente al gráfico de f en el punto de abscisa $x=a$ tiene un ángulo de inclinación $\alpha = \pi/3$, mientras que en el punto de abscisa $x=b$ el ángulo de inclinación $\beta=\pi/4$, calcular

$\int_a^b f'(x).f''(x)dx$.

$$tg\frac{\pi}{3}=\sqrt{3} \Rightarrow f'(a)=\sqrt{3}, \quad tg\frac{\pi}{4}=1 \Rightarrow f'(b)=1$$

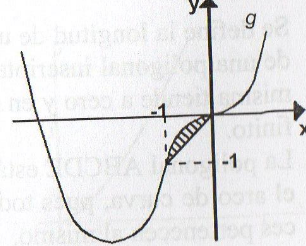
$$\int_a^b f'(x).f''(x)dx = \left.\frac{[f'(x)]^2}{2}\right]_a^b = \frac{1}{2}(1-3)=-1$$

9) Si g: $[a;b] \to \Re$ es continua y $F(x)=\int_a^x \left([g(t)]^4+1\right)dt$, probar que F es estrictamente creciente en $(a;b)$.

Aplicando el teorema fundamental del cálculo integral:

$F'(x)=[g(x)]^4+1>0 \Rightarrow F$ es estrictamente creciente en $(a;b)$

10) Calcular el área de la región limitada por $g(x) = x^4 + 2x^3$ y el segmento cuyos extremos son los puntos de inflexión de g. Graficar.



Primero buscamos los puntos de inflexión: $g'(x) = 4x^3 + 6x^2$, $g''(x) = 12x^2 + 12x$

$12x^2 + 12x = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 0$.

$g'''(x) = 24x + 12$, $g'''(-1) \ne 0$, $g'''(0) \ne 0$

$\therefore$ los puntos de inflexión están en A = (–1; –1) y en B = (0;0). La recta que pasa por eso dos puntos es $y = x$.

$$A=\int_{-1}^{0}\left(x^4+2x^3-x\right).dx = \left.\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{2}-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} = 0-\left(-\frac{1}{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{5}$$

11) Calcular el $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^x sen\, t.dt}{x^2}$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x sen\, t.dt}{x^2}\left(\frac{\to 0}{\to 0}\right)\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{sen\, x}{2x}=\frac{1}{2}$$

12) Sea f una función continua $\forall x\in\mathbb{R}$ tal que: $\int_3^7 f(t).dt=5$ y $\int_3^{10} f(t).dt=-3$, mostrar que existe $c\in(7;10)$ / $\int_3^c f(t).dt=0$.

Sea $F(x)=\int_3^x f(t).dt$, $\quad F(7)=\int_3^7 f(t).dt=5$

$F(10)=\int_3^{10} f(t).dt=-3$. Por Teorema de Bolzano $\exists\, c\in(7;10)/$

$F(c)=0\Rightarrow \int_3^c f(t).dt=0$.

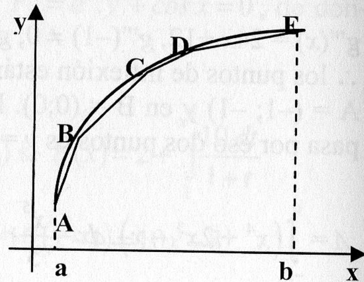
OTRAS APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

LONGITUD DE ARCO

Se define la longitud de un arco de curva como el límite de la longitud de una poligonal inscripta en él, cuando la longitud de cada lado de la misma tiende a cero y en consecuencia el número de lados tiende a infinito.

La poligonal ABCDE está inscripta en el arco de curva, pues todos sus vértices pertenecen al mismo.

Buscamos la integral que determina la longitud de arco correspondiente a una función derivable $f(x)$ con derivada continua en el intervalo [a;b].



La poligonal de n lados inscripta en ese arco es ABCD...E. Se divide el intervalo [a;b] en n subintervalos de longitudes $\Delta x_1, \Delta x_2,..., \Delta x_n$ respectivamente. Consideramos uno cualquiera de esos lados, por ejemplo el CD, cuya longitud llamamos l_i.

Dicho lado es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son Δx_i y Δy_i que es el correspondiente incremento de la función. Por el teorema de Pitágoras: $l_i=\sqrt{\Delta x_i^2+\Delta y_i^2}$.

Por el teorema del valor medio del cálculo diferencial:
$\Delta y_i=f'(x_i).\Delta x_i$, donde x_i es un punto interior al intervalo Δx_i.

Reemplazando queda: $l_i=\sqrt{\Delta x_i^2+[f'(x_i).\Delta x_i]^2}$. Sacando factor común y extrayendo fuera de la raíz: $l_i=\Delta x_i.\sqrt{1+[f'(x_i)]^2}$.

La longitud de la poligonal es la suma de cada uno de sus n lados:

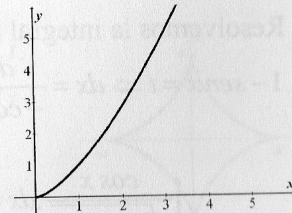
longitud de la poligonal: $\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta x_i.\sqrt{1+[f'(x_i)]^2}$.

La longitud de arco de la curva es el límite al que tiende la longitud de la poligonal cuando la longitud de cada uno de sus lados y por lo tanto la amplitud de cada Δx_i tiende a cero.

longitud de arco: $s=\lim\limits_{\substack{n\to+\infty\\ \Delta x_i\to 0}}\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta x_i.\sqrt{1+[f'(x_i)]^2}=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}.dx$

Ejemplos

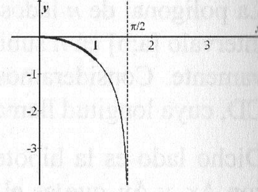
a) $y=x^{3/2}$ $\quad 0\le x\le 5$



$f'(x)=\frac{3}{2}\sqrt{x}$

$$s=\int_0^5\sqrt{1+\frac{9}{4}x}.dx=\frac{8}{27}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{3/2}\Bigg]_0^5=\frac{8}{27}\cdot\left(\frac{343}{8}-1\right)=\frac{335}{27}$$

b) $y = ln(cos\,x)$ en [0;1], sabiendo que $ln(sec\,x + tg\,x)' = sec\,x$



$$f'(x) = -\frac{sen\,x}{cos\,x}$$

$$s = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{sen^2 x}{cos^2 x}}.dx = \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{cos^2 x}}.dx = \int_0^1 sec\,x.dx = ln(sec\,x + tg\,x)\Big]_0^1 =$$

$$= ln(sec 1 + tg 1) \cong 1{,}22$$

c) Sea $F(x) = \int_0^x \sqrt{sen\,t}.dt$, determinar la longitud de arco de curva de la gráfica de F en el intervalo $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

$$F'(x) = \sqrt{sen\,x}$$

$$s = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \left(\sqrt{sen\,x}\right)^2}.dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + sen\,x}.dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{(1 + sen\,x).(1 - sen\,x)}{1 - sen\,x}} =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{cos^2 x}{1 - sen\,x}}.dx = \int_0^{\pi/2} \frac{cos\,x}{\sqrt{1 - sen\,x}}.dx$$

Resolvemos la integral aplicando sustitución:

$$1 - sen\,x = t \Rightarrow dx = \frac{dt}{-cos\,x}$$

$$\int \frac{cos\,x}{\sqrt{1 - sen\,x}}.dx = \int \frac{cos\,x}{t^{1/2}}.\frac{dt}{-cos\,x} = -\int t^{-1/2}.dt = -2t^{1/2} =$$

$$= -2\sqrt{1 - sen\,x}$$

$$s = \int_0^{\pi/2} \frac{cos\,x}{\sqrt{1 - sen\,x}}.dx = -2\sqrt{1 - sen\,x}\Big]_0^{\pi/2} = -2(0 - 1) = 2$$

LONGITUD DE ARCO EN FORMA PARAMÉTRICA

Vemos como se calcula la longitud de arco cuando la curva está expresada en forma paramétrica $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$.

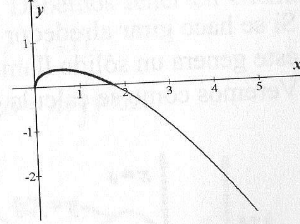
Si tenemos en cuenta que $f'(x) = \frac{g'(t)}{f'(t)}$ y que $dx = f'(t).dt$, reemplazando en la fórmula de longitud de arco para coordenadas cartesianas queda:

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}.dx = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + \left[\frac{g'(t)}{f'(t)}\right]^2}.f'(t).dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}.dt$$

donde t_0 y t_1 son los valores de t correspondientes a los valores de $x = a$ y $x = b$.

Ejemplos

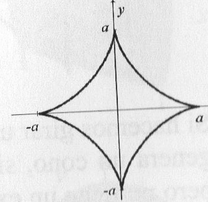
a) $\begin{cases} x = \sqrt{3}\,t^2 \\ y = t - t^3 \end{cases}$ $\quad 0 \le t \le 1$



$$f'(t) = 2\sqrt{3}\,t, \quad g'(t) = 1 - 3t^2$$

$$s = \int_0^1 \sqrt{(1 - 3t^2)^2 + (2\sqrt{3}t)^2}.dt = \int_0^1 \sqrt{(3t^2 + 1)^2}.dt = \int_0^1 (3t^2 + 1)dt = t^3 + t\Big]_0^1 = 2$$

b) Longitud de curva del astroide $\begin{cases} x = a.cos^3 t \\ y = a.sen^3 t \end{cases}$



$$f'(t) = 3a.cos^2 t.(-sen\,t)$$

$$g'(t) = 3a.sen^2 t.cos\,t$$

Podemos calcular ¼ de la longitud y luego multiplicarla por 4.

$0 \le t \le \pi/2$.

$$s=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{9a^2\cos^4 t.sen^2 t+9a^2 sen^4 t.\cos^2 t}.dt=$$

$$=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{9a^2\cos^2 t.sen^2 t.\left(sen^2 t+\cos^2 t\right)}.dt=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{9a^2\cos^2 t.sen^2 t}.dt$$

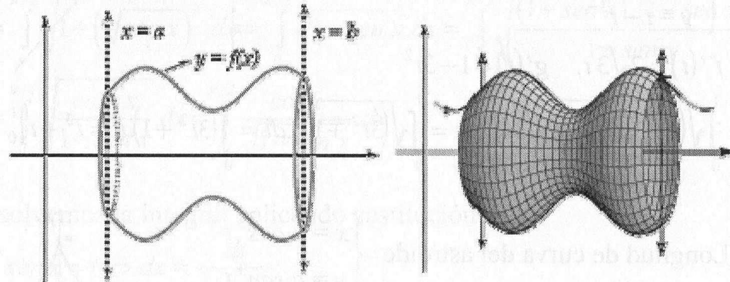
$$=12a\int_0^{\pi/2}\cos t.sen t.dt=6a\int_0^{\pi/2}sen(2t).dt=-3a\cos(2t)\Big]_0^{\pi/2}=$$

$$=-3a(\cos\pi-\cos 0)=-3a.(-2)=6a$$

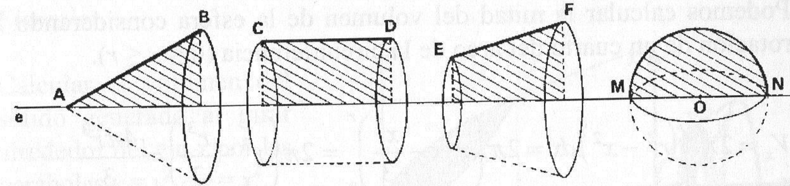
SÓLIDO DE REVOLUCIÓN

Caso en que la curva gira alrededor del eje x

Si se hace girar alrededor del eje x un arco de curva continua en $[a;b]$, éste genera un sólido llamado *sólido de revolución*.
Veremos como se calcula el volumen y el área de dicho sólido.

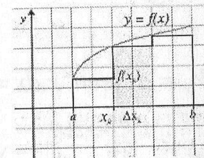


Si hacemos girar un segmento oblicuo con un extremo sobre el eje x se genera un cono, si es horizontal se genera un cilindro; si es oblicuo, pero no tiene un extremo sobre el eje x, se genera un cono truncado; si es un circunferencia, se genera una esfera, etc.



VOLUMEN

Si consideramos rectángulos de base Δx_i y altura $f(x_i)$ como cuando se planteó el problema del cálculo del área de una región plana, vemos que esos rectángulos al girar alrededor del eje x generan un cilindro de revolución.

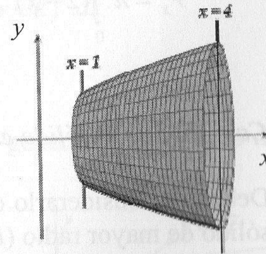


El volumen de cada cilindro que podemos considerar como un diferencial de volumen es: $dV_i=\pi.f(x_i)^2.\Delta x_i$. Debemos tener en cuenta que $f(x_i)$ es el radio de la base del cilindro, $r=f(x)$.

Por lo tanto el volumen es: $V_x=\int_a^b \pi.f(x)^2.dx=\pi.\int_a^b y^2.dx$.

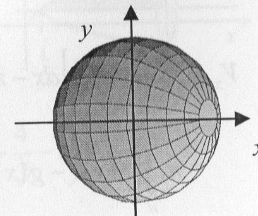
Ejemplos

a) Hallar el volumen del sólido de revolución generado al girar alrededor del eje x, la región limitada por la gráfica de $y=\sqrt{x},\ 1\le x\le 4$.



$$V_x=\pi.\int_1^4 x.dx=\pi.\frac{x^2}{2}\Big]_1^4=\pi.\left(8-\frac{1}{2}\right)=\frac{15\pi}{2}$$

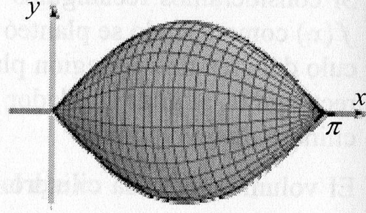
b) Calcular el volumen de la esfera generado por la rotación de la circunferencia $x^2+y^2=r^2$ al girar alrededor del eje x.
$y^2=r^2-x^2$.



Podemos calcular la mitad del volumen de la esfera considerando la rotación de un cuarto del arco de la circunferencia ($0 \le x \le r$).

$$V_x = 2\pi.\int_0^r (r^2 - x^2).dx = 2\pi.\left(r^2 x - \frac{x^3}{3}\right)_0^r = 2\pi.\left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) = \frac{4\pi r^3}{3}$$

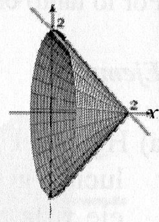
c) Hallar el volumen engendrado cuando la superficie limitada por la curva $y = sen\,x$, con $0 \le x \le \pi$, gira en torno al eje x.



$$V_x = \pi.\int_0^\pi sen^2 x.dx = \pi.\int_0^\pi \frac{1 - cos(2x)}{2}.dx =$$

$$\frac{\pi}{2}.\left(x - \frac{1}{2} sen\,(2x)\right)_0^\pi = \frac{\pi}{2}.(\pi - 0) = \frac{\pi^2}{2}$$

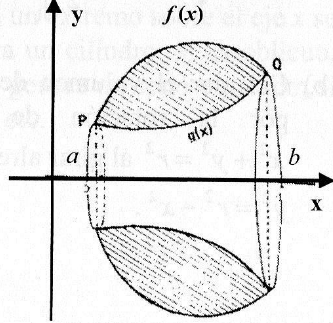
d) Hallar el volumen del sólido generado cuando la región limitada por las gráficas de $y = 2 - x$, $x = 0$, gira alrededor del eje x.



$$V_x = \pi.\int_0^2 (2 - x)^2.dx = -\pi.\left.\frac{(2-x)^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8\pi}{3}$$

Caso en que el sólido está generado por el giro de dos curvas

Debemos considerarlo como una diferencia de volúmenes entre el del sólido de mayor radio (R) y el del de menor radio (r). Por lo tanto: Si $R = f(x)$ y $r = g(x)$

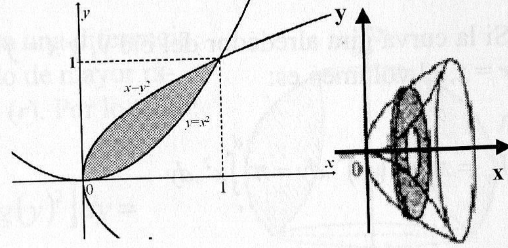


$$V_x = \pi.\int_a^b \left[f(x)^2\right]dx - \pi\int_a^b \left[g(x)^2\right]dx =$$

$$= \pi.\int_a^b \left[f(x)^2 - g(x)^2\right]dx$$

Ejemplo

Calcular el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje x por las parábolas $x = y^2$ e $y = x^2$.
$R = \sqrt{x}$, $r = x^2$



$$V_x = \pi.\int_0^1 \left[\left(\sqrt{x}\right)^2 - \left(x^2\right)^2\right].dx =$$

$$= \pi.\int_0^1 (x - x^4).dx = \pi.\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right)_0^1 = \frac{3\pi}{10}$$

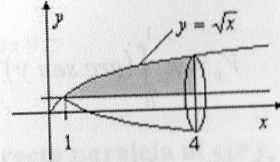
Caso en que la curva gira alrededor de una recta paralela al eje *x*

Si la curva gira alrededor de la recta $y = k$, el radio es $r = f(x) - k$. Por lo tanto el volumen del sólido que se genera es:

$$V_{y=k} = \pi.\int_a^b \left[f(x) - k\right]^2.dx = \pi.\int_a^b (y - k)^2.dx$$

Ejemplo

Calcular el volumen del sólido de revolución generado por el arco de parábola $y = \sqrt{x}$ al girar alrededor de la recta
$y = 1$. $1 \le x \le 4$.
$r = \sqrt{x} - 1$



$$V_{y=1} = \pi.\int_1^4 \left(\sqrt{x} - 1\right)^2.dx = \pi.\int_1^4 \left(x - 2\sqrt{x} + 1\right)dx =$$

$$= \pi.\left(\frac{x^2}{2} - 2\frac{x^{3/2}}{3/2} + x\right)_1^4 = \pi.\left(8 - \frac{32}{3} + 4 - \frac{1}{2} + \frac{4}{3} - 1\right) = \frac{7}{6}\pi$$

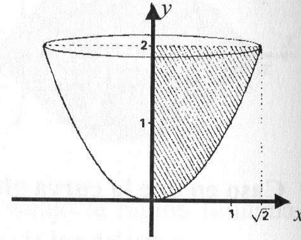
Caso en que la curva gira alrededor del eje *y*

Si la curva gira alrededor del eje y, y $x = f(y)$, $r = x$, el volumen es:

$$V_y = \pi . \int_c^d f(y)^2 .dy = \pi . \int_c^d x^2 .dy$$

Ejemplo

a) Calcular el volumen del sólido de revolución generado por la parábola $y = x^2$ al girar alrededor del eje y. $0 \leq y \leq 2$.

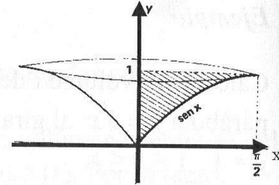


$$x = f(y) = \sqrt{y}$$

$$V_y = \pi . \int_0^2 y.dy = \pi . \frac{y^2}{2}\Big]_0^2 = 2\pi$$

b) Calcular el volumen del sólido de revolución generado por el arco $y = sen\, x$ al girar alrededor del eje y. $0 \leq x \leq \pi/2$.

$$x = f(y) = arc\ sen\ y\ .$$



cuando x varía entre 0 y $\pi/2$, y lo hace entre 0 y 1.

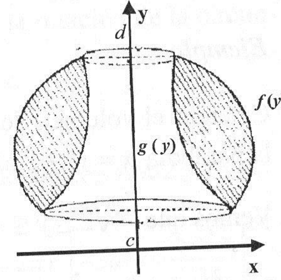
$$V_y = \pi . \int_0^1 (arc\ sen\ y)^2 .dy$$

La integral la podemos sacar de una tabla de integrales

$$V_y = \pi . \int_0^1 (arc\ sen\ y)^2 .dy = y.(arc\ sen\ y)^2 - 2y + 2\sqrt{1-y^2}.arc\ sen\ y \Big]_0^1 = 1{,}45$$

Caso en que el sólido está generado por el giro de dos curvas

Debemos considerarlo como una diferencia de volúmenes entre el sólido de mayor radio (R) y el de menor radio (r). Por lo tanto: Si $R = f(y)$ y $r = g(y)$

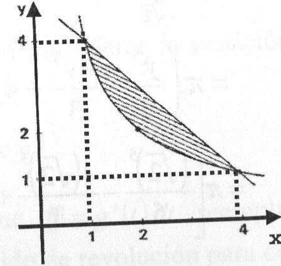


$$V_y = \pi . \int_c^d \left[f(y)^2\right] dy - \pi \int_c^d \left[g(y)^2\right] dy =$$

$$= \pi . \int_c^d \left[f(y)^2 - g(y)^2\right] dy$$

Ejemplo

Calcular el volumen del sólido de revolución generado por el arco $y = \frac{4}{x}$ e $y = -x + 5$ girar alrededor del eje y.



$x = f(y) = \frac{4}{y}$ y $x = g(y) = 5 - y$

vemos que ambas curvas se cortan en $c = 1$ y $d = 4$.

$$V_y = \pi . \int_1^4 \left[(5-y)^2 - \left(\frac{4}{y}\right)^2\right] .dy = \pi . \int_1^4 \left[(5-y)^2 - \frac{16}{y^2}\right] .dy$$

$$= \pi \left[-\frac{(5-y)^3}{3} + \frac{16}{y} \Big]_1^4 \right] = \pi \left(-\frac{1}{3} + 4 + \frac{64}{3} - 16 \right) = 9\pi$$

Caso en que la curva gira alrededor de una recta paralela al eje *y*

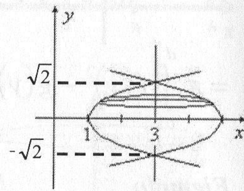
Si la curva gira alrededor de la recta $y = k$, el radio es $r = f(y) - k$. Por lo tanto el volumen del sólido que se genera es:

$$V_{x=k} = \pi.\int_a^b [f(y)-k]^2.dy = \pi.\int_a^b (x-k)^2.dy$$

Ejemplo

Calcular el volumen del sólido de revolución generado por el arco de la parábola $x = y^2 + 1$ al girar alrededor de la recta $x = 3$.

Vemos que $-\sqrt{2} \le y \le \sqrt{2}$.



$r = y^2 + 1 - 3 = y^2 - 2$

$$V_{x=3} = \pi.\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (y^2-2)^2.dy = \pi.\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (y^4-4y^2+4)dy =$$

$$= \pi.\left(\frac{y^5}{5} - \frac{4y^3}{3} + 4y\right)_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} =$$

$$= \pi\left[\frac{(\sqrt{2})^5}{5} - \frac{4(\sqrt{2})^3}{3} + 4\sqrt{2} - \frac{(-\sqrt{2})^5}{5} + \frac{4(-\sqrt{2})^3}{3} + 4\sqrt{2}\right] = \frac{64\sqrt{2}\pi}{15}$$

VOLUMEN EN FORMA PARAMÉTRICA

Caso en que la curva gira alrededor del eje *x*

Vemos como se calcula el volumen de un sólido de revolución cuando la curva está expresada en forma paramétrica $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$.

Si tenemos en cuenta que $dx = f'(t).dt$ y que $dy = g'(t).dt$, reemplazando en las fórmulas de volumen de sólido de revolución para coordenadas cartesianas queda: $V_x = \pi.\int_a^b y^2.dx = \pi.\int_{t_0}^{t_1} g(t)^2.f'(t).dt$, donde t_0 y t_1 son los valores de t correspondientes a los valores de $x = a$ y $x = b$.

Ejemplo

Calcular el volumen de la esfera generado por la rotación de la circunferencia $\begin{cases} x = r\,cos\,t \\ y = r\,sen\,t \end{cases}$ al girar alrededor del eje x.

Podemos calcular la mitad del volumen tomando $0 \le x \le r$, $\pi/2 \le t \le 0$.

$$V_x = 2\pi.\int_{\pi/2}^{0} r^2.sen^2t.r(-sent).dt = 2\pi r^3.\int_0^{\pi/2} sen^3t.dt = 2\pi r^3\left[-cos\,x + \frac{cos^3\,x}{3}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= 2\pi r^3.\left(-cos\frac{\pi}{2} + \frac{cos^3\,\pi/2}{3} + cos\,0 - \frac{cos^3\,0}{3}\right) = 2\pi r^3.\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Valor que coincide con el que obtuvimos al considerar la ecuación cartesiana de la circunferencia.

Caso en que la curva gira alrededor del eje *y*

Si tenemos en cuenta que $dx = f'(t).dt$ y que $dy = g'(t).dt$, reemplazando en las fórmulas de volumen de un sólido de revolución para coordenadas cartesianas queda: $V_y = \pi.\int_c^d x^2.dy = \pi.\int_{t_0}^{t_1} f(t)^2 \cdot g'(t).dt$.

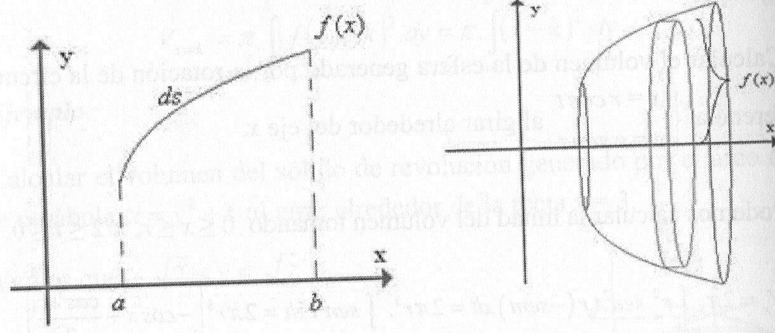
donde t_0 y t_1 son los valores de t correspondientes a los valores de $y = c$ e $y = d$.

ÁREA

Caso en que la curva gira alrededor del eje *x*

Ya hemos visto como calcular el volumen de un sólido de revolución, ahora planteamos como calcular el área de un sólido de revolución generado por un arco de curva al girar alrededor del eje *x*.

Llamamos *ds* a la longitud de un diferencial de arco.



El área de un cilindro de revolución generado por un ds es el área de un rectángulo de base $2\pi r$ (la longitud de la circunferencia) y altura ds.

$dA = 2\pi r.\ ds$, donde r = radio medio $= f(x)$

ds = longitud de la generatriz $= \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}.dx$

$$dA = 2\pi f(x).\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}.dx$$

El área de la superficie de revolución A_x es:

$$A_x = 2\pi.\int_a^b f(x).\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}.dx$$

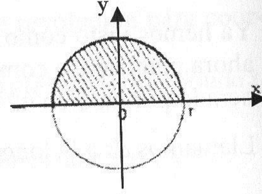
Caso en que la curva gira alrededor del eje *y*

Si consideramos que la curva gira alrededor del eje y, tenemos:

$$A_y = 2\pi.\int_c^d f(y).\sqrt{1+\left[f'(y)\right]^2}.dy$$

Ejemplos

a) Calcular el área de una esfera considerada engendrada por una semicircunferencia que gira alrededor del eje x.



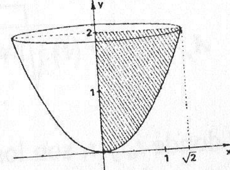
$y = \sqrt{r^2 - x^2}$

Podemos calcular la mitad del área considerando $0 \le x \le r$

$$A_x = 2\left(2\pi.\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}.\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}dx\right) = 2\left(2\pi.\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}.\sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}}dx\right) =$$

$$= 2\left(2\pi.\int_0^r \sqrt{r^2}\,dx\right) = 4\pi\int_0^r r.dx = 4\pi.rx\Big]_0^r = 4\pi.r^2$$

b) Calcular el área del sólido generado por la rotación de la curva $y = x^2$ en el intervalo $\left[0;\sqrt{2}\right]$ al girar alrededor del eje y.



$x = \sqrt{y} \Rightarrow x' = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$

$$A_y = 2\pi.\int_0^2 \sqrt{y}.\sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)^2}.dy = 2\pi.\int_0^2 \sqrt{y}.\sqrt{1+\frac{1}{4y}}.dy =$$

$$= \pi.\int_0^2 \sqrt{4y+1}.dy = \frac{\pi}{4}.\frac{2}{3}.\left(\sqrt{4y+1}\right)^3\Big]_0^2 = \frac{\pi}{6}.(27-1) = \frac{13}{3}\pi$$

ÁREA EN FORMA PARAMÉTRICA

Vemos como se calcula el área de un sólido de revolución cuando la curva está expresada en forma paramétrica $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$.

Si tenemos en cuenta que $y = f(x) = g(t)$, $f'(x) = \dfrac{g'(t)}{f'(t)}$ y $dx = f'(t).dt$, reemplazando en la fórmula de área de sólido de revolución para coordenadas cartesianas queda:

$$A_x = 2\pi.\int_{t_0}^{t_1} g(t).\sqrt{1+\left[\frac{g'(t)}{f'(t)}\right]^2}.f'(t).dt = 2\pi.\int_{t_0}^{t_1} g(t).\sqrt{\left[f'(t)\right]^2+\left[g'(t)\right]^2}.dt$$

donde t_0 y t_1 son los valores de t correspondientes a los valores de $x = a$ y $x = b$.

Si consideramos $x = f(y) = f(t)$, $f'(y) = \dfrac{f'(t)}{g'(t)}$ y $dy = g'(t).dt$, reemplazando en la fórmula de área de sólido de revolución para coordenadas cartesianas queda:

$$A_y = 2\pi.\int_{t_0}^{t_1} f(t).\sqrt{1+\left[\frac{f'(t)}{g'(t)}\right]^2}.g'(t).dt = 2\pi.\int_{t_0}^{t_1} f(t).\sqrt{\left[f'(t)\right]^2+\left[g'(t)\right]^2}.dt$$

donde t_0 y t_1 son los valores de t correspondientes a los valores de $y = c$ e $y = d$.

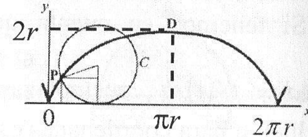
Caso en que la curva gira alrededor de una recta paralela a los ejes coordenados

$$A_{y=k} = 2\pi\int_{t_0}^{t_1} \left[k - g(t)\right].\sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}.dt$$

$$A_{x=h} = 2\pi\int_{t_0}^{t_1} \left[h - f(t)\right].\sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}.dt$$

Ejemplo

Hallar el área de la superficie generada al girar un arco de cicloide $\begin{cases} x = r(t - sen\,t) \\ y = r(1 - cos\,t) \end{cases}$ alrededor de su eje de simetría.



El eje de simetría es $x = \pi r$.

Se trata de girar el arco de curva OD alrededor de la recta $x = \pi r$.

$$A_{x=\pi r} = 2\pi\int_0^{\pi} \left[\pi r - r.(t - sen\,t)\right].\sqrt{\left[f'(t)\right]^2+\left[g'(t)\right]^2}.dt \qquad \begin{cases} f'(t) = r(1 - sen\,t) \\ g'(t) = r\,sen\,t \end{cases}$$

$$A_{x=\pi r} = 2\pi\int_0^{\pi}(\pi r - rt + r.sen\,t).\sqrt{r^2\left[(1-cos\,t)^2 + sen^2\,t\right]}.dt =$$

$$= 2\pi r^2\int_0^{\pi}(\pi - t + sen\,t).\sqrt{1 - 2cos\,t + cos^2\,t + sen^2\,t}.dt =$$

$$= 2\pi r^2\int_0^{\pi}(\pi - t + sen\,t).\sqrt{2.(1 - cos\,t)}.dt$$

Teniendo en cuenta que $sen^2\dfrac{t}{2} = \dfrac{1}{2}.(1 - cos\,t)$, se tiene que:

$$A_{x=\pi r} = 2\pi r^2\int_0^{\pi}(\pi - t + sen\,t).\sqrt{4.sen^2\frac{t}{2}}.dt = 4\pi r^2\int_0^{\pi}(\pi - t + sen\,t)sen\frac{t}{2}\,dt$$

$$= 4\pi r^2\int_0^{\pi}\left(\pi.sen\frac{t}{2} - \underbrace{t.sen\frac{t}{2}}_{❶} + \underbrace{sen\,t.sen\frac{t}{2}}_{❷}\right)dt$$

La integral ❶ se resuelve por partes y la integral ❷ por sustitución teniendo en cuenta que $sen\,t = 2sen\dfrac{t}{2}.cos\dfrac{t}{2}$.

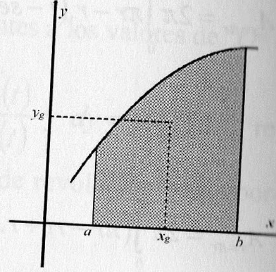
$$A_{x=\pi r} = 4\pi r^2\left(-2\pi.cos\frac{t}{2} + 2t\,cos\frac{t}{2} - 4.sen\frac{t}{2} + \frac{4}{3}sen^3\frac{t}{2}\right)\Bigg]_0^{\pi} = 8\pi\left(\pi - \frac{4}{3}\right).r^2$$

CENTRO DE GRAVEDAD O BARICENTRO DE UNA FIGURA PLANA

Vamos a ver como se calcula el centro de gravedad o baricentro de una figura plana en las siguientes situaciones:

a) Si la figura está limitada por una curva continua y el eje x en un intervalo $[a;b]$, las coordenadas del baricentro son:

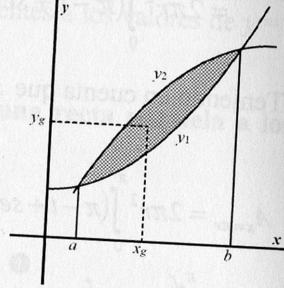
$$x_g = \frac{\int_a^b xy.dx}{A} \qquad y_g = \frac{\int_a^b y^2.dx}{2A}$$



donde A es él área de dicha región.

b) Si la figura está limitada por dos curvas continuas en un intervalo $[a;b]$, las coordenadas del baricentro son:

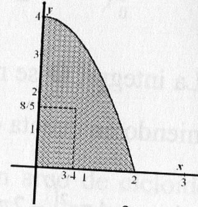
$$x_g = \frac{\int_a^b x(y_2 - y_1).dx}{A} \qquad y_g = \frac{\int_a^b (y_2^2 - y_1^2).dx}{2A}$$



Ejemplos

a) *Hallar el centro de gravedad de la figura limitada por $y = x^2$–4 en el primer cuadrante.*

$$A = \int_0^2 (4 - x^2).dx = 4x - \frac{x^3}{3}\Big]_0^2 = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$



$$x_g = \frac{3}{16}.\int_0^2 x(4 - x^2).dx = \frac{3}{16}.\int_0^2 (4x - x^3).dx = \frac{3}{16}.\left(2x^2 - \frac{x^4}{4}\right)\Big]_0^2$$

$$= \frac{3}{16}.(8 - 4) = \frac{3}{4}$$

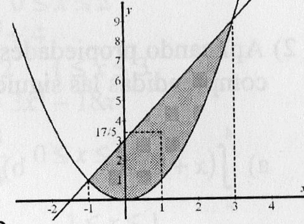
$$y_g = \frac{3}{32}.\int_0^2 (4 - x^2)^2.dx = \frac{3}{32}.\int_0^2 (16 - 8x^2 + x^4).dx \frac{3}{32}.\left(16x - \frac{8}{3}x^3 + \frac{x^5}{5}\right)\Big]_0^2 =$$

$$= \frac{3}{32}.\left(32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5}\right) = \frac{3}{32}.\frac{256}{15} = \frac{8}{5} \qquad G = \left(\frac{3}{4};\frac{8}{5}\right)$$

b) *Hallar el centro de gravedad de la región limitada por $y = x^2$ e $y = 2x+3$.*

$$A = \int_{-1}^3 (2x + 3 - x^2).dx = x^2 + 3x - \frac{x^3}{3}\Big]_{-1}^3 = 9 + 9 - 9 - 1 + 3 - \frac{1}{3} = \frac{32}{3}$$

$$x_g = \frac{3}{32}.\int_{-1}^3 x(2x + 3 - x^2).dx =$$



$$= \frac{3}{32}.\left(\frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Big]_{-1}^3 =$$

$$= \frac{3}{32}.\left(18 + \frac{27}{2} - \frac{81}{4} + \frac{2}{3} - \frac{3}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{32}.\frac{32}{3} = 1$$

$$y_g = \frac{3}{64}.\int_{-1}^3 \left[(2x + 3)^2 - x^4\right].dx = \frac{3}{64}.\int_{-1}^3 (4x^2 + 12x + 9 - x^4).dx =$$

$$= \left(\frac{4x^3}{3} + 6x^2 + 9x - \frac{x^5}{5}\right)\Big]_{-1}^3 = \frac{3}{64}.\left(36 + 54 + 27 - \frac{243}{5} + \frac{4}{3} - 6 + 9 - \frac{1}{5}\right)$$

$$= \frac{3}{64}.\frac{1088}{15} = \frac{17}{5} \qquad G = \left(1;\frac{17}{5}\right)$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1) Calcular las siguientes integrales aplicando propiedades

a) $\int_1^2 [f(x)+2g(x)].dx$ si $\int_1^2 2f(x).dx = 6$ y $\int_1^2 g(x).dx = 7$

b) i) $\int_2^0 g(x).dx$, ii) $\int_0^2 [2f(x)-3g(x)].dx$. iii) $\int_2^0 f(x).dx + \int_1^2 g(x).dx$,

si $\int_0^1 f(x).dx = 2$; $\int_0^2 g(x).dx = 4$; $\int_1^2 f(x).dx = 3$; $\int_0^1 g(x).dx = -1$

2) Aplicando propiedades encontrar los valores entre los cuales están comprendidas las siguientes integrales definidas

a) $\int_2^4 (x+5).dx$ b) $\int_0^4 \frac{dx}{1+x^2}$ c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen\ x.dx$

3) Obtener las derivadas de las siguientes funciones

a) $F(x)=\int_0^x t^2.dt$ b) $G(x)=\int_1^x cos\ t.dt$ c) $H(x)=\int_0^{6x+2} tg\ t.dt$

d) $T(x)=\int_x^{x^2} arc\ tg\ t.dt$ e) Si $F(x)=\int_3^{x^2} ln\ t.dt$, hallar $F'(1)$

f) $T(x)=\int_1^{x^3} \sqrt[3]{t}.dt$, hallar $T''(3)$

4) Calcular las siguientes integrales definidas

a) $\int_1^2 (x^2+1).dx$ b) $\int_{-1}^1 (2x^3-x^2).dx$ c) $\int_0^{\pi} sen\,x.dx$ d) $\int_0^1 e^x.dx$

e) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}.dx$ f) $\int_0^1 x.e^x.dx$ g) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^2\,x.dx$ h) $\int_1^e ln\,x.dx$

i) $\int_4^9 \left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right).dx$ j) $\int_1^e x.ln\,x.dx$ k) $\int_{-2}^4 \left|4-x^2\right|.dx$

l) Si $\int_{-2}^3 [f(x)+3].dx = 6$, calcular $\int_{-2}^3 f(x).dx$

5) Calcular las áreas limitadas por las gráficas de las siguientes funciones y el eje x

a) $y=x^2$ $0 \le x \le 1$ b) $y=x^3$ $0 \le x \le 2$
c) $y=sen\,x$ $0 \le x \le \pi$ d) $y=-x^2+4$
e) $y=ln\,x$ $1 \le x \le e$ f) $y=x+2$ $1 \le x \le 3$
g) $y=x^3-3x^2+2x$ h) $y=x^3-3x^2-18x$
i) $y=\frac{1}{1-x^2}$ $0 \le x \le 0{,}6$ j) $y=\frac{x-3}{x+4}$ $0 \le x \le 3$
k) $y=tg\,x$ $-\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{6}$ l) $y=\frac{1}{1+x^2}$ $-1 \le x \le 1$
m) $y=x^2-1$ n) $y=\left|x^2-4x+3\right|$, entre los valores de x en los cuales la función no es diferenciable.

6) Calcular las áreas limitadas por las gráficas de dos o más funciones

a) $\begin{cases} y=x+2 \\ y=x^2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y=sen\,x \\ y=cos\,x \\ x=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y=x^2 \\ y=2x \\ y=0{,}5\,x^2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y=5 \\ y=-x+3 \\ x=0{,}5x+3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} y^2=2x \\ x^2=2y \end{cases}$ f) $\begin{cases} y=x^3+x^2 \\ y=x^3+1 \end{cases}$ g) $\begin{cases} y=-x^2+4x \\ y=x^2 \end{cases}$ h) $\begin{cases} y^2=2x-2 \\ y=x-5 \end{cases}$

i) $f(x)=x^2$ y $g(x)=\begin{cases} -x+2 & x \le 0 \\ -x+6 & x > 0 \end{cases}$ j) $\begin{cases} y=-2x^2+8 \\ y=-x^2+4 \end{cases}$

k) $\begin{cases} y=6 \\ y=-x^2+4 \\ y=-x+2 \\ eje\ y \end{cases}$

l) la gráfica de $y = x^3$ y la de su función derivada.

m) La gráfica de la función $y = 1 + 2x - x^2$ y la recta que pasa por A= (–1; –2) y B = (2;1).

n) La gráfica de la función $2y = x^2$, su recta tangente en $x_0 = 2$ y el eje x.

o) La gráfica de la función $y = -x^2$, su recta tangente en $x_0 = 1$ y el eje de ordenadas.

p) La gráfica de la función $y = -x^3+1$, su recta normal en $x_0 = -1$ y el eje de abscisas.

7) Resolver los siguientes problemas

a) $\forall x \in \Re$: $f(x) > 0$ y f continua, $F(x)=\int_x^0 f(t).(t^2-t).dt$, determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de F.

b) Sea $f: \Re \to \Re$ continua y $F(x)=\int_0^{x^2+2} (t-3).ln\,(t+1).dt$ determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de F.

c) Dadas $f(x)=2x^2$ y $g(x)=-ax^2+16a+32$ determinar $a > 0$ para que el área de la región limitada por las gráficas de f y g sea de 180 unidades cuadradas.

d) Si $f: \Re \to \Re$ es continua tal que $\int_a^x f(t).dt = x^2 + ln(x^3)+5$, hallar $f(4)$.

e) Sea $g: \Re \to \Re$ es derivable tal que $g\,(e) = 5$ y $\int_1^e g'(x).ln\,x.dx = 6$, hallar $\int_1^e \frac{g(x)}{x}dx$.

f) Hallar el polinomio $P(x)$ de tercer grado tal que: $P(0) = P(-2) = 0$, $P(1) = 15$ y además $\int_{-2}^{0} P(x).dx = \frac{4}{3}$

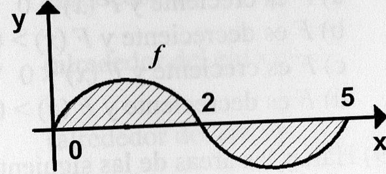
g) Si $F(x)=\int_x^{2x} \frac{1}{t}.dt$, con $x > 0$, probar que F es constante aplicando el teorema fundamental del cálculo integral.

h) Determinar el valor medio $f(x)=2+|x|$ en [–1;3] ¿En qué puntos del intervalo toma dicho valor?

i) Hallar k para que $\int_{-2}^{6} f(x).dx = 1$ si $f(x)=\begin{cases} x & -2 \le x \le 0 \\ \frac{1}{2}-kx & 0 < x \le 4 \\ x-4 & 4 < x \le 6 \end{cases}$

j) Dadas $f(x)=x-x^2$ y $g(x)=ax$, hallar $a \in \Re$ para que la región situada por encima de la gráfica de g y por debajo de la gráfica de f tenga área 9/2.

k) Si f es continua y periódica de período 5, el área de la región rayada es 20 y $\int_2^5 f(x).dx$ es igual a –10, calcular $\int_2^{12} f(x).dx$.



l) Sean g: $\Re \to \Re$ y F: $\Re \to \Re$ / $F(x)=\int_{\pi/2}^{g(x)}(cos\,t+1).dt$. Si el polinomio de Taylor de grado 2 de g en $x = 3$ es $p(x)=\frac{\pi}{2}+2(x-3)-(x-3)^2$, encuentre el polinomio de Taylor de grado 2 de F en $x = 3$.

m) Sea $F(x)=\int_0^x e^{-t^2}.dt$, calcular una aproximación de F (0,5) mediante un polinomio de Mac Laurin de tercer grado.

n) Sea $f(x)$ una función continua $\forall x\in\Re$. Determine extremos relativos de $F(x)=\int_1^{x^3} e^{f(t)}.dt$.

o) Calcular el $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x}{x-2}\int_2^x \frac{sen\,t}{t}.dt\right)$.

p) Calcular $\int_0^4 (x^2-4x+3).dx$, ¿mide la integral el área de la región limitada por la función y el eje x con $0\le x\le 4$?

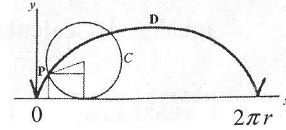
8) Sea $f:\Re\to\Re$ continua y positiva y $F(x)=\int_a^x f(t).dt$, decir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) F es creciente y $F(x)>0\ \forall x\in\Re$.
b) F es decreciente y $F(x)>0\ \forall x>a$.
c) F es creciente y $F(x)<0\ \forall x<a$.
d) F es decreciente y $F(x)>0\ \forall x\in\Re$.

9) Hallar las áreas de las siguientes regiones planas

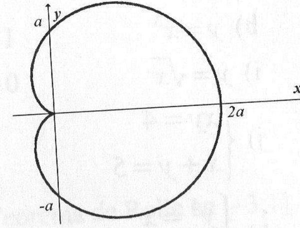
a) Una onda de cicloide y el eje x

$$\begin{cases} x=r(t-sen\,t) \\ y=r(1-cos\,t) \end{cases}$$



b) La cardioide

$$\begin{cases} x=a\,cos\,t\,(1+cos\,t) \\ y=a\,sen\,t\,(1+cos\,t) \end{cases}$$



10) Hallar las longitudes de arco de las siguientes curvas

a) $y=x$ $\quad 0\le x\le 1$ $\qquad$ b) $y=\frac{1}{3}(x^2+2)^{3/2}$ $\quad 0\le x\le 2$

c) $6xy=x^4+3$ $\quad 1\le x\le 2$ $\qquad$ d) $y=\frac{1}{8}x^4+\frac{1}{4x^2}$ $\quad 1\le x\le 2$

e) $y=2x^2+5x$ por debajo del eje x $\qquad$ f) $F(x)=\int_0^x \sqrt{e^{2t}-1}.dt$ $\quad 0\le x\le 1$

g) $\begin{cases} x=t^2 \\ y=t^3 \end{cases}$ $\quad 0\le t\le 4$ $\qquad$ h) $\begin{cases} x=4+t^2 \\ y=6-4t^2 \end{cases}$ $\quad 0\le t\le 4$

i) $\begin{cases} x=e^t.cos\,t \\ y=e^t.sen\,t \end{cases}$ $\quad 0\le t\le 4$ $\qquad$ j) $\begin{cases} x=2+4sen\,(2t) \\ y=4-4cos\,(2t) \end{cases}$ $\quad \frac{\pi}{6}\le t\le \frac{\pi}{3}$

11) Hallar los volúmenes de los siguientes sólidos de revolución

a) $y=\sqrt{x}$ $\quad 0\le x\le 3$ (alrededor del eje x)
b) $y=x^2+1$ $\quad -1\le x\le 1$ (alrededor del eje x)
c) $y=\frac{x^2}{4}$ $\quad 0\le x\le 4$ (alrededor del eje x)
d) $y=\frac{1}{x}$ $\quad 1\le x\le 4$ (alrededor del eje x)
e) $x=y^3$ $\quad 0\le x\le 8$ (alrededor del eje y)
f) $x=y,\ y=2x,\ y=4$ (alrededor del eje y)
g) $y=2-x^2+4x$ $\quad 0\le x\le 4$ (alrededor de $y=2$)

h) $y=x^3$ $\quad 1\le y\le 8$ $\quad$ (alrededor del eje y)

i) $y=\sqrt{x}$ $\quad 0\le y\le 2$ $\quad$ (alrededor de $x=4$)

j) $\begin{cases} xy=4 \\ x+y=5 \end{cases}$ $\quad$ (alrededor del eje y)

k) $\begin{cases} y^3=x \\ y=x^2 \end{cases}$ $\quad$ (alrededor del eje y)

l) Generado al girar un arco de cicloide $\begin{cases} x=r(t-sen\,t) \\ y=r(1-cos\,t) \end{cases}$ alrededor del eje x.

m) Generado al girar un arco de astroide $\begin{cases} x=a.cos^3\,t \\ y=a.sen^3\,t \end{cases}$ alrededor del eje x.

n) Generado al girar el lazo $\begin{cases} x=t^2 \\ y=a.sen^3\,t \end{cases}$ $0\le t\le 2$ alrededor del eje x.

12) Hallar las áreas de los siguientes sólidos de revolución

a) $y=\frac{1}{2}x-1$ $\quad$ en el intervalo $[2;6]$ $\quad$ (alrededor del eje x)

b) $y=\frac{1}{9}x^3$ $\quad$ en el intervalo $[0;2]$ $\quad$ (alrededor del eje x)

c) $y=\frac{x^3}{6}+\frac{1}{2x}$ $\quad$ en el intervalo $[1;3]$ $\quad$ (alrededor del eje x)

d) Generado al girar un arco de cicloide $\begin{cases} x=r(t-sen\,t) \\ y=r(1-cos\,t) \end{cases}$ alrededor del eje x.

13) Hallar el centro de gravedad de la región plana limitada por las gráficas de las funciones $f(x)=x+2$ y $g(x)=4-x^2$.

Problemas integradores

1) Dada $f(x)=\begin{cases} x^2+4x+5 & si\ x<-1 \\ -x^2+3 & si\ x\ge -1 \end{cases}$,

a) Verificar si cumple con las hipótesis del Teorema de Rolle en $[-3;1]$
b) Calcular extremos relativos.
c) Hallar el área de la región limitada por $f(x)$ y la recta $y=2$.
d) Calcular la recta tangente y utilizarla para aproximar linealmente $f(-0{,}98)$.

2) Dada $f(x)=\begin{cases} x^3+1 & si\ x<1 \\ x^2+x & si\ x\ge 1 \end{cases}$,

a) Verificar si cumple con las hipótesis del Teorema Lagrange en $[-2;2]$
b) Calcular extremos relativos.
c) Hallar el área de la región limitada por las curvas.
d) Calcular la recta tangente y utilizarla para aproximar linealmente $f(1{,}02)$.

3) Si g es continua y $g'(2)=4$, calcular $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\int_2^{e^x}[g(ln\,x)-g(2)]dx}{x^2-4x+4}$

4) Determinar una función g derivable $\forall x>0$ y $g'(x)\ne 0$ que verifique: $g^2(x)=\int_0^x \frac{t.g(t)}{3t^2+15t+18}.dt$

5) Calcular el área de la región plana limitada por la gráfica de la función $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$ y la recta de ecuación $y=mx-6$ que pasa por el punto de inflexión de $f(x)$.

RESPUESTAS

1) a) 17); b) i) a) -4, ii) -2, iii) 0

2) a) $14 \le \int_2^4 (x+5).dx \le 18$ b) $\frac{4}{17} \le \int_0^4 \frac{1}{1+x^2}dx \le 4$ c) $0 \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen\,x.dx \le \frac{\pi}{2}$

3) a) $F'(x)=x^2$ b) $G'(x)=cos\,x$ c) $H'(x)=6\,tg\,(6x+2)$
d) $T'(x)=2x.arc\,tg\,x^2-arc\,tg\,x$ e) $F'(1)=0$ f) $T''(3)=81$

4) a) $\frac{10}{3}$ b) $-\frac{2}{3}$ c) 2 d) e^{-1} e) $\frac{\pi}{4}$ f) 1 g) $\frac{\pi}{4}$ h) 1 i) $\frac{32}{3}$
j) $\frac{1}{4}+\frac{e^2}{4}$ k) $\frac{64}{3}$ l) -9

5) a) $A=\frac{1}{3}$ b) $A=4$ c) $A=2$ d) $A=\frac{32}{3}$ e) $A=1$ f) $A=8$
g) $A=\frac{1}{2}$ h) $A=\frac{999}{4}$ i) $A=0,693$ j) $A=0,91$
k) $A=0,28$ l) $A=\frac{\pi}{2}$ m) $A=\frac{4}{3}$ n) $\frac{10}{3}$

6) a) $A=\frac{9}{2}$ b) $A=\sqrt{2}-1$ c) $A=4$ d) $A=6$ e) $A=\frac{4}{3}$ f) $A=\frac{4}{3}$ g) $A=\frac{8}{3}$
h) $A=18$ i) $A=\frac{32}{3}$ j) $A=\frac{32}{3}$ k) $A=\frac{41}{6}$ l) $A=\frac{27}{4}$ m) $A=\frac{9}{2}$
n) $A=\frac{1}{3}$ o) $A=\frac{1}{3}$, p) $A=8$

7) a) $(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$ decrece, $(0;1)$ crece
b) $(-\infty;-1)\cup(0;1)$ decrece, $(-1;0)\cup(1;+\infty)$ crece c) $a=\frac{7}{64}$
d) $f(4)=\frac{35}{4}$ e) $\int_1^a \frac{g(x)}{x}.dx=-1$ f) $P_3(x)=6x^3+11x^2-2x$

h) $f(c)=\frac{13}{4}$ $c=\frac{5}{4}$ i) $k=\frac{1}{8}$ j) $a=-2$ k) -10

l) $p(x)=2.(x-3)-3(x-3)^2$ m) $F(0,5)\cong\frac{11}{24}$ n) no tiene extremos

o) $sen\,2$, p) $I=\frac{4}{3}$, no mide el área porque $f(x)$ no es positiva.

8) a) V, b) F, c) F, d) F 9) a) $3\pi r^2$ b) $1,5\pi a^2$

10) a) $\sqrt{2}$ b) $\frac{14}{3}$ c) $\frac{17}{12}$ d) $\frac{33}{16}$ e) 6,94 f) $e-1$ g) 55,72 h) 80
i) $\sqrt{2}(e^4-1)$ j) $\frac{4}{3}\pi$

11) a) $4,5\pi$ b) $\frac{56}{15}\pi$ c) $\frac{64}{5}\pi$ d) $\frac{3}{4}\pi$ e) $\frac{128}{7}\pi$ f) 16π g) $\frac{512\pi}{15}$
h) $\frac{93\pi}{5}$ i) $\frac{256\pi}{15}$ j) 9π k) $\frac{5}{14}\pi$ l) $5\pi^2 r^3$ m) $\frac{32\pi a^3}{105}$ n) $\frac{64\pi}{3}$

12) a) $4\sqrt{5}\pi$ b) $\frac{98}{81}\pi$ c) $\frac{208}{9}\pi$ d) $\frac{64\pi r^2}{3}$ 13) $\left(-\frac{1}{2};\frac{12}{5}\right)$

Problemas integradores

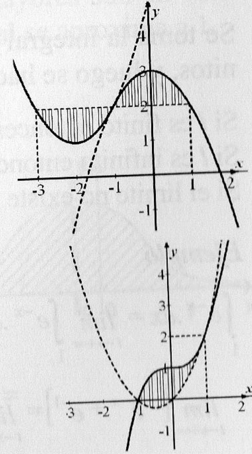
1) a) verifica, b) Máx. (0;3), mín (−2;1),
c) $A=\frac{8}{3}$, d) $y_t=2x+4$, $f(-0,98)\cong 2,04$

2) a) verifica, b) no tiene extremos, c) $A=\frac{4}{3}$,
d) $y_t=3x-1$, $f(1,02)\cong 2,06$

3) $2e^2$

4) $g(x)=\frac{1}{6}.ln\frac{(x+3)^3}{(x+2)^2}$

5) A = 8.



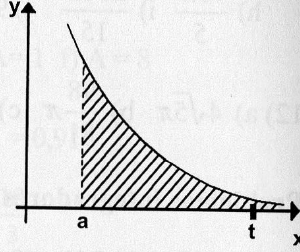
INTEGRALES IMPROPIAS

Hasta ahora vimos el caso del cálculo de una integral definida en el que la función es continua en el intervalo $[a;b]$ o bien, si es discontinua, está acotada en ese intervalo y el intervalo de integración está acotado. Si alguna de estas condiciones no se cumple tenemos las integrales impropias[1].

I) Impropias de 1° especie (el intervalo de integración no está acotado, al menos uno de los límites de integración es infinito)

a) f es continua en $[a;+\infty)$

$$\int_a^{+\infty} f(x).dx = \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x).dx$$



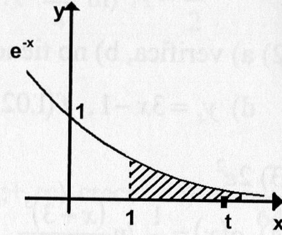
Se toma la integral entre a y t, valores finitos, y luego se hace tender t a infinito.

Si l es finito entonces la integral es **convergente** y converge a l.
Si l es infinito entonces la integral es **divergente.**
Si el límite no existe la integral es **oscilante.**

Ejemplo

$$\int_1^{\infty} e^{-x}.dx = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t e^{-x}.dx = \lim_{t\to+\infty} \left(-e^{-x}\right]_1^t\Big) =$$

$$\lim_{t\to+\infty} \left[-e^{-x}+e^{-1}\right] = \lim_{t\to+\infty} \left(-\frac{1}{e^t}+\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}$$



[1] Si $f(x) \geq 0$, la integral impropia mide el área bajo la curva.

La integral converge a $\frac{1}{e}$, es decir que cuánto mayores son los valores de x, más el valor de la integral se aproxima a $\frac{1}{e}$.

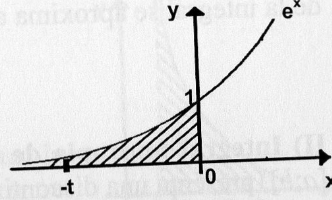
b) f es continua en $(-\infty;b]$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x).dx = \int_{-t}^{b} f(x).dx$$

Ejemplo

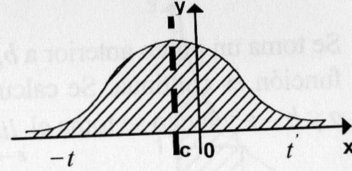
$$\int_{-\infty}^{0} e^{x}.dx = \lim_{t\to+\infty} \int_{-t}^{0} e^{x}.dx = \lim_{t\to+\infty} e^{x}\Big]_{-t}^{0} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \left[e^{0}-e^{-t}\right] = 1$$



La integral converge a 1. Es decir que cuánto mayores son en valor absoluto los valores de x, más el valor de la integral se aproxima a 1.

c) f es continua en $\Re$, $c \in \Re$ y $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x).dx$



Se toma un punto interior c y se descompone la integral en dos integrales, una del tipo **a)** y otra del tipo **b)**.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x).dx = \int_{-\infty}^{c} f(x).dx + \int_{c}^{+\infty} f(x).dx =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \int_{-t}^{c} f(x).dx + \lim_{t'\to+\infty} \int_{c}^{+\infty} f(x).dx$$

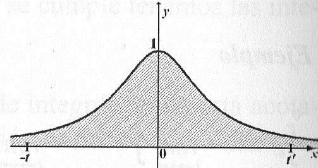
Ejemplo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \int_{-t}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{t'\to+\infty} \int_{0}^{t'} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to+\infty} arc\,tg\,x\Big]_{-t}^{0} + \lim_{t'\to+\infty} arc\,tg\,x\Big]_{0}^{t'} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \left[arc\,tg\,0 - arc\,tg\,(-t)\right] + \lim_{t'\to+\infty} \left[arc\,tg\,t' - arc\,tg\,0\right] = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi$$

En ese caso la integral converge a π, es decir que cuánto mayores son, en valor absoluto, los valores de *x*, más el valor de la integral se aproxima a π.

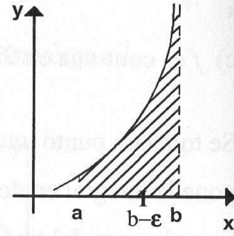


II) Integral impropia de 2° especie (la función no está acotada en [*a*;*b*], presenta una discontinuidad esencial)

a) la discontinuidad está en el extremo superior

$$\int_a^b f(x).dx \;\; y \;\; \lim_{x\to b^-} f(x) = \infty$$

Se toma un punto anterior a *b*, *b* – ε, en el cual la función es continua. Se calcula la integral entre *a* y *b* – ε y luego se toma el $\lim_{\varepsilon\to0^+}$ de la integral.

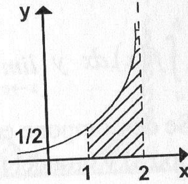


$$\int_a^b f(x).dx = \lim_{\varepsilon\to0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x).dx$$

Ejemplo

$$\int_1^2 \frac{1}{2-x}.dx = \lim_{\varepsilon\to0^+} \int_1^{2-\varepsilon} \frac{1}{2-x}.dx = \lim_{\varepsilon\to0^+} \left(-ln|2-x|\right)\Big]_1^{2-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to0^+} \left[-ln\,\varepsilon + ln\,1\right] = -(-\infty) = +\infty$$

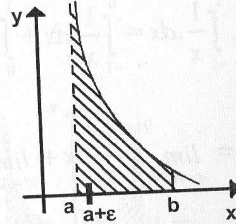


La integral es divergente, es decir que cuanto más se acercan los valores de *x* a 2, mayor es el valor de la integral.

b) la discontinuidad está en el extremo inferior

$$\int_a^b f(x).dx \;\; y \;\; \lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$$

Se toma un punto posterior a *a*, *a*+ε, en el cual la función es continua. Se calcula la integral entre *a*+ε y *b*, luego se toma el $\lim_{\varepsilon\to0^+}$ de la integral.

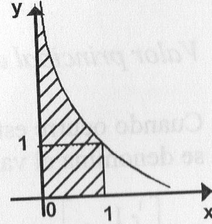


$$\int_a^b f(x).dx = \lim_{\varepsilon\to0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x).dx$$

Ejemplo

$$\int_0^1 \frac{1}{x}.dx = \lim_{\varepsilon\to0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}.dx = \lim_{\varepsilon\to0} ln\,x\Big]_\varepsilon^1 =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to0^+} \left[ln\,1 - ln\,\varepsilon\right] = -(-\infty) = +\infty$$



La integral es divergente, es decir que cuanto más se acercan los valores de *x* a 0 mayor es el valor de la integral.

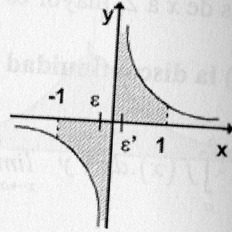
c) la discontinuidad está en un punto *c* interior a [*a*;*b*]

$\int_a^b f(x).dx \;\; y \;\; \lim_{x\to c} f(x)=\infty \;\; y \;\; c\in(a;b)$

Se descompone en dos integrales, una del tipo a) y otra del tipo b).

$$\int_a^b f(x).dx=\int_a^c f(x).dx+\int_c^b f(x).dx$$

Ejemplo



$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}.dx=\int_{-1}^{0}\frac{1}{x}.dx+\int_{0}^{1}\frac{1}{x}.dx=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{-1}^{0-\varepsilon}\frac{1}{x}.dx+\lim_{\varepsilon'\to0^+}\int_{0+\varepsilon'}^{1}\frac{1}{x}.dx=\lim_{\varepsilon\to0^+} ln|x|\Big]_{-1}^{-\varepsilon}+\lim_{\varepsilon'\to0^+} ln|x|\Big]_{\varepsilon'}^{1}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0^+}\left(ln|-\varepsilon|-ln|-1|\right)+\lim_{\varepsilon'\to0^+}\left(ln|1|-ln|\varepsilon'|\right)=-\infty+\infty$$

Llegamos a una indeterminación de infinitos (diferencia de infinitos). La integral impropia resulta ser divergente ya que divergen las integrales que la componen.

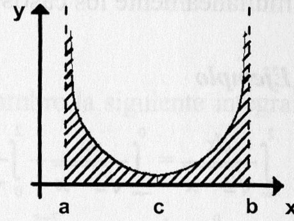
Valor principal de Cauchy de la integral impropia

Cuando ocurre esta situación, si consideramos ε = ε', se obtiene lo que se denomina el valor principal de la integral impropia:

$$v.p.\left[\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}.dx\right]=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{-1}^{0-\varepsilon}\frac{1}{x}.dx+\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{0+\varepsilon}^{1}\frac{1}{x}.dx=\lim_{\varepsilon\to0^+} ln|x|\Big]_{-1}^{-\varepsilon}+\lim_{\varepsilon\to0^+} ln|x|\Big]_{\varepsilon}^{1}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0^+}\left(ln|-\varepsilon|-ln|-1|\right)+\lim_{\varepsilon\to0^+}\left(ln|1|-ln|\varepsilon|\right)=0$$

d) la discontinuidad está en ambos extremos

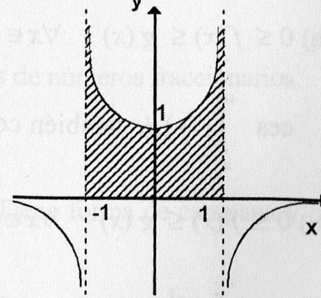


$\int_a^b f(x).dx \;\; y \;\; \lim_{x\to a^+} f(x)=\infty \;\; y \;\; \lim_{x\to b^-} f(x)=\infty$

Se toma un punto *c* interior a [*a*;*b*] y se descompone en una del tipo a) y otra del tipo b).

$$\int_a^b f(x).dx=\int_a^c f(x).dx+\int_c^b f(x).dx$$

Ejemplo



$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{1-x^2}.dx=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{-1+\varepsilon}^{0}\frac{1}{1-x^2}.dx+$$

$$+\lim_{\varepsilon'\to0^+}\int_{0}^{1-\varepsilon'}\frac{1}{1-x^2}.dx=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0^+}\left(\frac{1}{2}ln|x+1|-\frac{1}{2}ln|1-x|\right)\Bigg]_{-1+\varepsilon}^{0}+$$

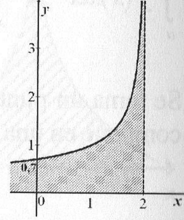
$$+\lim_{\varepsilon'\to0^+}\left(\frac{1}{2}ln|x+1|-\frac{1}{2}ln|1-x|\right)\Bigg]_{0}^{1-\varepsilon'}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{1}{2}ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\Bigg]_{-1+\varepsilon}^{0}+\lim_{\varepsilon'\to0}\frac{1}{2}ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\Bigg]_{0}^{1-\varepsilon'}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0^+}\left(\frac{1}{2}ln\,1-\frac{1}{2}ln\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}\right)+\lim_{\varepsilon'\to0^+}\left(\frac{1}{2}ln\frac{2-\varepsilon'}{\varepsilon'}-\frac{1}{2}ln\,1\right)=-(-\infty)-(-\infty)=\infty$$

III) Integral impropia de 3º especie o tipo mixto (se presentan simultáneamente los casos I y II). Se desdobla en dos integrales.

Ejemplo



$$\int_{-\infty}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2-x}} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{\sqrt{2-x}} + \int_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2-x}} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \int_{-t}^{0} \frac{dx}{\sqrt{2-x}} + \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{0}^{2-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{2-x}} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \left(-2\sqrt{2-x}\right)\Big]_{-t}^{0} + \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(-2\sqrt{2-x}\right)\Big]_{0}^{2-\varepsilon} = \lim_{t\to+\infty} \left(-2\sqrt{2}+\sqrt{2+t}\right)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(-2\sqrt{\varepsilon}+2\sqrt{2}\right) = +\infty + 2\sqrt{2} = +\infty$$

CRITERIO DE COMPARACIÓN

a) $0 \le f(x) \le g(x)$ $\quad \forall x \in [a;+\infty)$ y $\int_a^{+\infty} g(x).dx$ es convergente, entonces $\int_a^{+\infty} f(x).dx$ también converge.

b) $0 \le f(x) \le g(x)$ $\quad \forall x \in [a;+\infty)$ y $\int_a^{+\infty} f(x).dx$ es divergente, entonces $\int_a^{+\infty} g(x).dx$ también diverge.

Ejemplo

Probar que $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}.dx$ converge.

Consideramos la función $f(x)=e^{-x}/e^{-x^2} \le e^{-x}$ $\quad \forall x \in [1;+\infty)$

$$\int_1^{+\infty} e^{-x}.dx = \lim_{t\to+\infty} \frac{e^{-x}}{-1}\Big]_1^t = \lim_{t\to+\infty} \left(-e^{-t}+e^{-1}\right) = \frac{1}{e},$$ vemos que converge, por lo tanto la integral dada también es convergente.

ALGUNAS INTEGRALES IMPROPIAS FAMOSAS

Funciones Gamma

Fueron descubiertas por *Euler*. Recibe este nombre la siguiente integral impropia: $\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1}.e^{-x}.dx$

Se puede demostrar fácilmente, por ejemplo que $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}.dx = 1$.

Esta función es convergente si $p > 0$ y tiene las siguientes propiedades:

a) $\Gamma(p+1) = p.\Gamma(p)$ $\qquad$ b) $\Gamma(p).\Gamma(1-p) = \dfrac{\pi}{sen(\pi x)}$

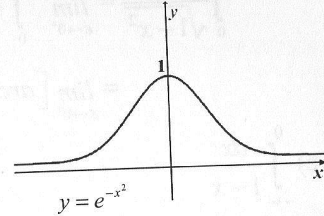
c) $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ $\qquad$ d) $\Gamma(p+1) = p!$ $\quad (p \in \aleph)$

Entre otras cosas permite calcular factoriales de números fraccionarios.

Curva de distribución normal

Es una curva muy utilizada en estadística. Tiene forma de campana y es simétrica con respecto a su media μ.

La función se define así:



$$n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

donde σ es la desviación standard.

Se sabe por estadística que el área de la zona limitada por la curva y el eje de abscisas es 1. Es decir que $\int_{-\infty}^{+\infty} n(x).dx = 1$

EJERCICIOS RESUELTOS

a) $\int_1^{+\infty} \frac{ln\, x}{x^2}.dx$

$$\int_1^{+\infty} \frac{ln\, x}{x^2}.dx = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{ln\, x}{x^2}.dx$$, resolvemos la integral por partes

$$\int \frac{ln\, x.dx}{x^2}$$

$u = ln\, x \qquad du = \frac{1}{x}.dx$

$dv = \frac{1}{x^2}.dx \qquad v = -\frac{1}{x}$

$$\int_1^{+\infty} \frac{ln\, x}{x^2}.dx = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{x}.ln\, x - \frac{1}{x}\Big]_1^t\right) = \lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{ln\, t}{t} - \frac{1}{t} + 0 + 1\right) = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{-\frac{1}{t}}{1}\right) + 1 = 1$$

b) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

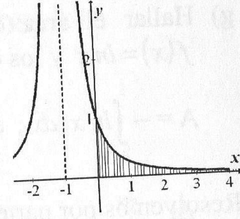
$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to0^+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to0^+} arc\, sen\, x\Big]_0^{1-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to0^+}\left[arc\, sen(1-\varepsilon) - arc\, sen\, 0\right] = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

c) $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1-x}$

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1-x} = \lim_{t\to+\infty} \int_{-t}^0 \frac{dx}{1-x} = \lim_{t\to+\infty}\left(-ln(1-x)\Big]_{-t}^0\right) = \lim_{t\to+\infty}\left[-ln\, 1 + ln(1+t)\right] = \infty$$

d) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^2}$



$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^2} = \lim_{t\to+\infty} \int_0^t \frac{dx}{(x+1)^2} = \lim_{t\to+\infty} -\frac{1}{x+1}\Big]_0^t$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{t+1} + 1\right) = 0 + 1 = 1$$

e) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int_0^{+\infty} \frac{e^x.dx}{(e^x)^2 + 1}$$, hacemos $z = e^x \Rightarrow dz = e^x.dx$, tenemos que

$$\int \frac{dz}{z^2+1} = arc\, tg\, z + C \Rightarrow \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = arc\, tg\, e^x + C$$

Volvamos ahora a la integral impropia:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \lim_{t\to+\infty}\left(arc\, tg\, e^x\Big]_0^t\right) = \lim_{t\to+\infty}\left(arc\, tg\, e^t - arc\, tg\, e^0\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

La integral converge a $\frac{\pi}{4}$.

f) ¿Es impropia $\int_0^1 \frac{sen\, x.dx}{x}$? Justifique.

La función $\frac{sen\, x}{x}$ presenta una discontinuidad en $x = 0$. Sin embargo como $\lim_{x\to0} \frac{sen\, x}{x} = 1$, la discontinuidad es evitable y entonces la integral no es impropia.

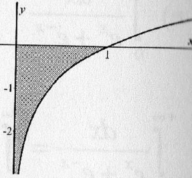
g) Hallar el área de la región plana limitada por la gráfica de $f(x)=\ln x$ y los ejes coordenados.

$A=-\int_0^1 \ln x\,.dx$, queda una integral impropia de 2da. especie.

Resolvemos por partes la primitiva: $u=\ln x \quad du=\frac{1}{x}.dx$
$dv=dx \quad v=x$

$$\int_0^1 \ln x\,.dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \ln x\,.dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(x.\ln|x|-x\right)_\varepsilon^1=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(1.\ln 1-1-\varepsilon.\ln\varepsilon+\varepsilon\right)=-1$$

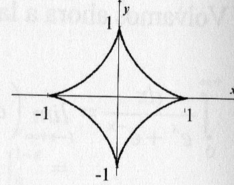
$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\varepsilon.\ln\varepsilon=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\ln\varepsilon}{1/\varepsilon}\overset{L'H}{=}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1/\varepsilon}{-1/\varepsilon^2}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}(-\varepsilon)=0$$



Por lo tanto el área es 1.

h) Hallar la longitud del arco de la astroide $x^{2/3}+y^{2/3}=1$.

$L=4\int_0^1\sqrt{1+(y')^2}.dx$ (1)



Derivando en forma implícita:

$$\frac{2}{3}x^{-1/3}+\frac{2}{3}y^{-1/3}.y'=0\Rightarrow y'=-\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}$$

Reemplazando en (1) queda:

$$L=4\int_0^1\sqrt{1+\left(-\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}\right)^2}\,.dx=4\int_0^1\sqrt{\frac{x^{2/3}+y^{2/3}}{x^{2/3}}}.dx=4\int_0^1\frac{dx}{x^{1/3}}$$

Queda una integral impropia de 2da. especie.

$$\int_0^1\frac{dx}{x^{1/3}}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 x^{-1/3}dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{3}{2}x^{2/3}\Big]_\varepsilon^1=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\varepsilon\right)=\frac{3}{2}$$

La longitud de la astroide es 6.

EJERCICIOS PROPUESTOS

I) Resolver las siguientes integrales

A) 1º Especie

1) $\int_1^{+\infty} e^{-x}.dx$ 2) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$ 3) $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^3}$ 4) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{a^2+x^2}$

5) $\int_0^{+\infty} x.e^{-x^2}.dx$ 6) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ 7) $\int_1^{+\infty}\frac{x.dx}{\left(1+x^2\right)^4}$ 8) $\int_{-\infty}^0 e^x.dx$

9) $\int_{-\infty}^0\frac{dx}{1-x}$ 10) $\int_{-\infty}^0 e^{2x}.dx$ 11) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ 12) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

B) 2º Especie

1) $\int_0^1\frac{dx}{x}$ 2) $\int_0^2\frac{2.dx}{\sqrt{4-x^2}}$ 3) $\int_5^6\frac{dx}{(x-5)^{2/3}}$ 4) $\int_0^2\frac{dx}{x-2}$

5) $\int_1^4\frac{dx}{\sqrt{x-1}}$ 6) $\int_{-1}^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 7) $\int_{-1}^1\frac{dx}{x^2}$ 8) $\int_1^5\frac{dx}{\sqrt{(x-1)^3}}$

9) $\int_2^6\frac{dx}{\sqrt{6-x}}$ 10) $\int_0^1 \ln x.dx$ 11) $\int_0^1 x.\ln x.dx$ 12) $\int_0^9\frac{dx}{\sqrt{x}}$

II) Resolver los siguientes problemas

1) Dada $f(x)=Ax.e^{-bx}$, con $b>0$ y $x\geq 0$,

a) hallar A para que $\int_0^{+\infty} f(x).dx=1$

b) para el valor de A calculado hallar $\int_0^{+\infty} x.f(x).dx$

2) Hallar $a > 0$ tal que $\int_0^a \frac{dx}{x+\sqrt{x}} = 2$. ¿El 2 representa un área?

3) Calcular el área limitada por $y = x.e^{-x^2/2}$ y su asíntota.

4) Calcular el valor principal de $\int_{-4}^{0} \frac{(x-1).dx}{x^2+2x-3}$.

5) Calcular el área limitada por $y = \frac{1}{1+x^2}$ y su asíntota $\forall x \geq 1$.

6) Hallar la curva que satisface $y'(x^2+1)^2 + 2x = 0$ y pasa por $(0;1)$ y el área delimitada por dicha curva y el eje x.

7) Hallar el área limitada por $y = \frac{1}{x}$ e $y = \frac{1}{x+1}$ a la derecha de $x = 1$.

8) Calcular el volumen del sólido de revolución generado por el arco de la curva $y = \frac{1}{x^2}$ al girar alrededor del eje x, a la derecha de $x = 1$.

9) Dada la curva representativa de la $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 1 \\ ln\,x & x \geq 1 \end{cases}$, calcular el área limitada por la misma y el eje x a la derecha del extremo absoluto.

10) Calcular $\int_1^{+\infty} f(x).dx$ si f es continua en $[1;+\infty)$ y satisface la ecuación $\frac{1}{x} + \int_1^{ln x} f(e^t).dt = \frac{1}{x^2} + 2$.

RESPUESTAS

I) A) 1) e^{-1} 2) ∞ 3) $\frac{1}{8}$ 4) $\frac{\pi}{2a}$ 5) $\frac{1}{2}$ 6) ∞ 7) $\frac{1}{48}$ 8) 1 9) ∞

10) $\frac{1}{2}$ 11) π 12) $\frac{\pi}{2}$

B) 1) ∞ 2) π 3) 3 4) ∞ 5) $2\sqrt{3}$ 6) π 7) ∞ 8) ∞ 9) 4

10) -1 11) $-\frac{1}{4}$ 12) 6

II) 1) a) $A = b^2$ b) 0 2) $a = (e-1)^2$, sí porque la función es positiva.

3) $A = 2$ 4) $ln\,3$ 5) $A = \frac{\pi}{4}$ 6) $A = \pi$ 7) $A = ln\,2$ 8) $V = \pi$

9) $A = \infty$ 10) $\int_1^{+\infty} f(x).dx = \infty$

Capítulo 12

Sucesiones y Series

Definición, igualdad.
Sucesiones acotadas.
Límite finito de una sucesión, sucesión convergente.
Límite infinito de una sucesión, sucesión divergente.
Sucesión oscilante. Sucesiones monótonas.
El número e.

Series numéricas, clasificación.
Series geométricas.
Condición necesaria de convergencia.
Serie de términos positivos, criterios de convergencia: de D'Alambert, de comparación, de Raabe, de la raíz de Cauchy.
Series alternadas, criterio de Leibniz.
Convergencia absoluta y condicional.
Serie de potencias, teorema de Abel.
Radio e intervalo de convergencia.
Serie de Mac Laurin.

SUCESIONES

Una sucesión infinita es una función cuyo dominio son los números naturales y cuya imagen es un subconjunto de $\Re$. Consideraremos sucesiones de números reales.

$$s : \aleph \rightarrow \Re \ / \ \forall n \in \aleph : s(n) = a_n$$

$$(a_n) = (a_1; a_2; ...; a_n; ...) \quad n \in \aleph$$

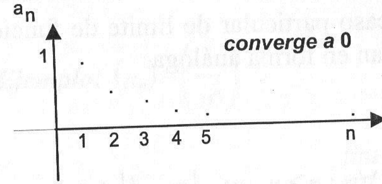
Los a_i son los términos de la sucesión. En particular a_n es el *término n-simo*. La sucesión se indica habitualmente como (a_n) o $(a_n)_{n \in \aleph}$

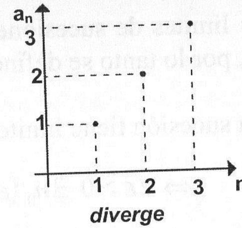
Ejemplos: a) $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right) = \left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; ...; \frac{1}{n}; ...\right)$

b) $(b_n) = \left(\frac{1}{2^n}\right) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; ...; \frac{1}{2^n}; ...\right)$

Representación gráfica

$(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ es un conjunto de ptos. aislados $(a_n) = (n)$





Igualdad

Dos sucesiones son iguales si sus términos coinciden ordenadamente.
Es decir: $(a_n) = (b_n) \Leftrightarrow \forall n \in \aleph$: $a_n = b_n$

Ejemplo: $(a_n) = \left(\frac{2}{n}\right) = \left(2;1;\frac{2}{3};\frac{1}{2};.....\right)$

$(b_n) = \left(\frac{n+2}{n} - 1\right) = \left(2;1;\frac{2}{3};\frac{1}{2};.....\right)$

Sucesiones acotadas

$k \in \Re$ es una cota superior de la sucesión $(a_n) \Leftrightarrow \forall n : a_n \le k$

$k' \in \Re$ es una cota inferior de la sucesión $(a_n) \Leftrightarrow \forall n : a_n \ge k'$

Extremo inferior o ínfimo: Es la mayor de las cotas inferiores

Extremo superior o supremo: Es la menor de las cotas superiores

Ejemplos: a) $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ 0 es cota inferior e ínfimo

1 es cota superior y supremo

b) $(a_n) = \left(\frac{1}{3^n}\right)$ 0 es cota inferior e ínfimo

$\frac{1}{3}$ es cota superior y supremo

Una sucesión está acotada si tiene cota superior e inferior

Límite finito de una sucesión

Los límites de sucesiones son un caso particular de límite de funciones, por lo tanto se definen y calculan en forma análoga.

Una sucesión tiene límite finito l

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 (\varepsilon) \in \aleph > 0 / \forall n : n \ge n_0 \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon$$

Observación: surge que $-\varepsilon < a_n - l < \varepsilon$, o sea que desde un n en adelante, los infinitos términos de la sucesión quedan dentro de la franja $-\varepsilon + l < a_n < \varepsilon + l$.

Es decir que a partir de un n_0 la diferencia, en valor absoluto, entre los términos de la sucesión y el límite se puede hacer tan pequeña como se quiera.

Se indica: $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = l$

Ejemplo: $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$

Vemos que a medida que aumenta n, los términos de la sucesión tienden a 0, es decir que el límite es 0. Veamos como se determina el n_0 a partir del cual la diferencia entre los términos de la sucesión y el límite se puede hacer tan pequeña como se quiera.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Es decir que si quisiéramos que la diferencia, en valor absoluto, fuese menor que 0,001, debemos considerar n a partir de 1.000. Para todos los $n \ge 1000$, los a_n cumplen con la condición establecida, es decir que: $|a_n - l| < \varepsilon$.

Sucesión convergente

Una sucesión es convergente si y sólo si tiene límite finito.

Ejemplo: $(a_n) = \left(\frac{1}{n^2}\right)$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

Propiedades de las sucesiones convergentes

1. El límite, si existe, es único.
2. Si (a_n) converge entonces el $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = \left|\lim_{n\to+\infty} a_n\right|$

Ejemplo: $\left(\frac{2}{n}\right) = \left(2;1;\frac{2}{3};\frac{1}{2};.....\right)$

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{2}{n}\right| = \left|\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n}\right| \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n} = \lim_{n\to+\infty} 0 \Rightarrow 0 = 0$$

3. $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \wedge \forall n \in \aleph : |b_n| \le k \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} (a_n.b_n) = 0$

4. (a_n) y (b_n) covergen y $\forall n \in \aleph : a_n \ge b_n \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n \ge \lim_{n\to+\infty} b_n$

5. Teorema de intercalación

Si (a_n) y (c_n) covergen al mismo límite l y $\forall n \in \aleph : a_n \le b_n \le c_n$, entonces (b_n) converge con el mismo límite l.

6. Toda sucesión convergente está acotada.

Ejemplo

$$(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right) = \left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},....,\frac{1}{n},...\right)$$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, vemos que la sucesión es convergente, por lo tanto está acotada. Ya hemos visto que el ínfimo es 0 y que el supremo es 1.

Esta propiedad permite analizar la acotación a partir de la convergencia.

El recíproco no es verdadero en general.

$(a_n) = (-1)^n = (-1;1;-1;1;...)$ está acotada (una cota inferior es -1 y una cota superior es 1) y no es convergente.

7. Conservación del signo

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l \;\wedge\; l > 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \aleph / \forall n \ge n_0 : a_n > 0$$
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l \;\wedge\; l < 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \aleph / \forall n \ge n_0 : a_n < 0$$

Álgebra de las sucesiones convergentes

1. Si (a_n) y (b_n) son sucesiones convergentes, también lo son $(a_n \pm b_n)$ y su límite es la suma o resta de los límites.
2. Si (a_n) y (b_n) son sucesiones convergentes, también lo son su producto y el límite del producto de ambas sucesiones es el producto de los límites.
3. Si (a_n) y (b_n) son sucesiones convergentes y $\lim_{n\to+\infty} b_n \neq 0$, entonces su cociente (a_n / b_n) también lo es y el límite del cociente, es el cociente de los límites.

Límite infinito de una sucesión

Una sucesión tiene límite infinito

$$\Leftrightarrow \forall M > 0 \; \exists n_0(M) > 0 \; / \; \forall n : (n \in \aleph \wedge n > n_0) \Rightarrow |a_n| > M$$

Es decir que los términos de la sucesión superan, a partir de uno determinado, cualquier valor por más grande que éste sea.

Se indica así: $\lim_{n\to+\infty} a_n = \infty$

Ejemplo: $(a_n) = (n^2)$

$$|n^2| \ge M \Rightarrow n^2 \ge M \Rightarrow n \ge \sqrt{M} \Rightarrow n_0 \ge \sqrt{M}$$

Sucesión divergente

Una sucesión es divergente si y sólo si tiene límite infinito.

El término enésimo de la sucesión tiende a infinito.

Ejemplo: $(a_n)=(2^n)=(2;4;8;16;...;2^n;...)$

$$\lim_{n\to+\infty} 2^n=+\infty$$

Subsucesiones

Dada una sucesión podemos determinar con algunos de sus términos subsucesiones contenidas en la primera.

Propiedades

a) si una sucesión numérica converge, entonces cualquier subsucesión de ella también converge al mismo límite.

b) Si ambas subsucesiones tienen límites diferentes, entonces el límite de la sucesión no existe.

Ejemplo

$$(a_n)=\left(1;-1;\frac{1}{2};-2;\frac{1}{3};-3;\frac{1}{4};-4;....\right)$$

$(a_{2k})=(-1;-2;-3;-4;....)=(-n)$ es la sucesión de los subíndices pares

$\lim_{n\to+\infty}(-n)=-\infty \Rightarrow$ la subsucesión es divergente.

$(a_{2k+1})=\left(1;\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4};....\right)=\left(\frac{1}{n}\right)$ es la sucesión de los subíndices impares

$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0 \Rightarrow$ la subsucesión es convergente.

Por lo tanto la sucesión (a_n) no tiene límite.

c) si ambas subsucesiones tienen el mismo límite, no podemos asegurar que la sucesión tenga límite.

Sucesión oscilante

Una sucesión es oscilante si y sólo si no tiene límite finito ni infinito.

Ejemplo: $(a_n)=(-1)^n=(-1,1,-1,...,(-1)^n,...)$

Demostramos que no tiene límite considerando las subsucesiones

$(a_{2k})=(1;1;1;1;....)\Rightarrow l_1=1$

$(a_{2k+1})=(-1;-1;-1;-1;....)\Rightarrow l_2=-1$

Por lo tanto no existe el límite

SUCESIONES MONÓTONAS

Sucesión creciente

Una sucesión (a_n) es creciente $\Leftrightarrow \forall n\in \aleph: a_n \le a_{n+1}$

Sucesión decreciente

Una sucesión (a_n) es decreciente $\Leftrightarrow \forall n\in \aleph: a_n \ge a_{n+1}$

Una sucesión es monótona $\Leftrightarrow$ es creciente o decreciente.

Ejemplos

$(a_n)=\left(\frac{1}{n}\right)=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},...,\frac{1}{n},...\right)$ es monótona decreciente.

$(b_n)=(2^n)=(2,4,8,...,2^n,...)$ es monótona creciente.

Las sucesiones monótonas son importantes porque siempre tienen límite finito (si está acotada) o infinito (si no está acotada).

Teorema fundamental

Toda sucesión monótona y acotada es convergente.

Ejemplo

Analizar la convergencia de la sucesión: $(a_n)=(q^n)$ con $q>0$

$$(q^n)=(q;q^2;q^3;......;q^n;......) \qquad \text{con } q>0$$

Sea $a_n=q^n : a_n>0 \ \forall n\in N$

Analicemos la monotonía $\frac{a_{n+1}}{a_n}=q \qquad (1)$

a) $0<q<1$

(q^n) es decreciente. Además está acotada inferiormente $(0<a_n)$ por lo tanto existe $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=l$ y $l\geq 0$.

Si $l>0$ en (1) $\frac{a_{n+1}}{a_n}=q<1 \quad \forall n\in N$ y como $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

es $1>q=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$ lo cual es absurdo, luego debe ser $l=0$.

b) $q>1$

(q^n) es creciente, entonces existe $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ donde dicho límite es finito, mayor o igual que uno o infinito.

Si fuese finito $1<q=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{l}{l}=1$ absurdo, por lo tanto

$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=+\infty$ si $q>1$.

c) $q=1$

$a_n=1 \quad \forall n\in N$

$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=1$ si $q=1$

Teoremas de Weierstrass

a) Si una sucesión (a_n) es monótona creciente y acotada superiormente es convergente a su supremo, si no está acotada $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=+\infty$.

Ejemplo

$$(a_n)=\left(\frac{2n}{n+1}\right)=(1;1{,}33;1{,}5;1{,}6;1{,}66;1{,}75......)$$

La sucesión es monótona creciente y acotada superiormente, el supremo es 2.

El $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n}{n+1}=2$

b) Si una sucesión (a_n) es monótona decreciente y acotada inferiormente es convergente a su ínfimo, si no está acotada $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=-\infty$.

Ejemplo

$$(a_n)=\left(\frac{2}{n}\right)=\left(2;1;\frac{2}{3};\frac{1}{2};...;\frac{2}{n}...\right)$$

La sucesión es monótona decreciente y acotada inferiormente, el ínfimo es 0. El $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{n}=0$.

Criterio de D'Alambert

Sea (a_n) una sucesión de términos positivos tal que existe el

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}<1 \Rightarrow (a_n)_{n\in\aleph} \text{ converge a 0.} \quad \left(\lim_{n\to+\infty} a_n = 0\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}>1 \Rightarrow (a_n)_{n\in\aleph} \text{ diverge.} \quad \left(\lim_{n\to+\infty} a_n = \infty\right)$$

Ejemplo

$$(a_n)=\left(\frac{1}{3^n}\right)=\left(\frac{1}{3};\frac{1}{9};\frac{1}{27};\frac{1}{81};\dots;\frac{1}{3^n};\dots\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{3^n}}{\frac{1}{3^{n-1}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3^{n-1}}{3^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3^n}{3^n.3}=\frac{1}{3}<1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3^n}=0$$

Algunos límites importantes

a) *El número e como límite de una sucesión*

Aceptamos sin demostración que el número e es el límite de la sucesión: $(a_n)=\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]$, $\quad e=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Ejemplos: i) $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^{3n}=\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{5}}\right)^{\frac{n}{5}}\right]^{\frac{5}{n}.3n}=e^{15}$

La sucesión $(a_n)=\left[\left(1+\frac{5}{n}\right)^{3n}\right]$ converge a e^{15}, que es su supremo.

ii)

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{5n}=\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1-\frac{2}{n^2+1}\right)^{5n}\right]=\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n^2+1}{-2}}\right)^{\frac{n^2+1}{-2}}\right]^{\frac{-2}{n^2+1}.5n}=e^0=1$$

La sucesión $(a_n)=\left[\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{5n}\right]$ converge a 1, que es su supremo.

b) Consideremos la siguiente sucesión:

$$\left(\sqrt[n]{n}\right)_{n\geq 2}=\left(\sqrt{2};\sqrt[3]{3};\sqrt[4]{4};\sqrt[5]{5};\dots;\sqrt[n]{n};\dots\right)_{n\geq 2}=$$

$$=\left(1{,}4142;1{,}4422;1{,}4142;1{,}3797;1{,}3480;1{,}3204;1{,}2968;1{,}2765;\dots;\sqrt[n]{n};\dots\right)_{n\geq 2}$$

El $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=\lim_{n\to+\infty}n^{(1/n)}=1$.

c) $\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{r^n}=0$ si $r>1$

Ejemplo: $\left(\frac{n}{2^n}\right)=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{3}{8};\frac{1}{4};\frac{5}{32};\dots;\frac{n}{2^n};\dots\right)$

Vemos que los términos de la sucesión tienden a 0.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2^n}=0$$

Basándonos en esta propiedad podemos asegurar que esta sucesión está acotada inferiormente y converge a su ínfimo que es el 0.

Demostración

Podemos demostrar esta propiedad aplicando el criterio de D'Alambert.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n}{r^n}}{\frac{n-1}{r^{n-1}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n.r^n}{(n-1).r^n.r} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{r} = \frac{1}{r} < 1 \quad \text{por ser } r > 1$$

por lo tanto la sucesión converge a 0.

Uso de las funciones reales, continuas y derivables, para calcular límite de sucesiones

Sea $f(x) / f : [1;+\infty) \to \Re$, continua y derivable hasta el orden necesario en $[1;+\infty)$ y $a_n = f(n)$, entonces $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{n\to+\infty} a_n$.

Esta propiedad permite aplicar la regla de L'Hopital para resolver límite de sucesiones, pero la regla se aplica siempre sobre $f(x)$.

Ejemplo: $(a_n) = \left(\frac{n^2}{e^n}\right)$ $\quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{e^n} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x} = 0$

Comparación de sucesiones

a) Si (a_n) y (b_n) son dos sucesiones numéricas tales que $\forall n \in \aleph$: $a_n \leq b_n$ a partir de un determinado $n = n_0$ y además (b_n) converge con límite B, entonces (a_n) también converge con límite que no supera a B.

b) Si (a_n) y (b_n) son dos sucesiones numéricas tales que $\forall n \in \aleph$: $a_n \geq b_n$ a partir de un determinado $n = n_0$ y además (b_n) diverge, entonces (a_n) también diverge.

EJERCICIOS RESUELTOS

1) Probar, aplicando la definición que la sucesión $(a_n)_{n\in\aleph} / a_n = \frac{2n+1}{n+1}$ converge a 2.

Fijamos un margen de tolerancia $\varepsilon > 0$ y debemos hallar un número natural n_0 tal que $\forall n > n_0$ se verifique que: $\left|\frac{2n+1}{n+1} - 2\right| < \varepsilon$.

Operando resulta $\left|\frac{2n+1-2n-2}{n+1}\right| = \left|\frac{-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}$.

El propósito es que esta expresión resulte menor que ε desde un n_0 en adelante. Si consideramos que $n+1 > n \ \forall n \in \aleph$, es posible considerar $\frac{1}{n} < \varepsilon$ si $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Luego es posible elegir $n_0 = \frac{1}{\varepsilon} + 1$.

Verificamos la definición con el n_0 elegido.

Debemos probar que si $n_0 = \frac{1}{\varepsilon} + 1$, entonces $\left|\frac{2n+1}{n+1} - 2\right| < \varepsilon$. Si tenemos en cuenta que $n > \frac{1}{\varepsilon} + 1$ se verifica que $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Obtenemos entonces que $\left|\frac{2n+1}{n+1} - 2\right| = \left|\frac{-1}{n+1}\right| < \frac{1}{n} < \varepsilon$. Con lo que queda verificada la demostración.

2) Analicemos la convergencia de las siguientes sucesiones.

a)
$(a_n) = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \left(\sqrt{2} - 1; \sqrt{3} - \sqrt{2}; 2 - \sqrt{3}; \sqrt{5} - 2; \sqrt{6} - \sqrt{5}; ...; \sqrt{n+1} - \sqrt{n}; ...\right)$
$= (0{,}3178; 0{,}2679; 0{,}2360; 0{,}2134; ...)$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right).\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)} = 0$$

Es convergente, por lo tanto está acotada, el supremo es $\sqrt{2}-1$, y el ínfimo es 0.

La sucesión es monótona decreciente y converge a su ínfimo.

b) $(a_n)=\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}\right)=\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1};\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1};...;\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1};...\right)=$
$=(0{,}5;0{,}5857;0{,}6340;0{,}6667;0{,}6909;...)$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}=1$$

Es convergente, por lo tanto está acotada, el supremo es 1, el ínfimo es 0,5. La sucesión es monótona creciente y converge a su supremo.

c) $(a_n)=\left[\left(1+\frac{3}{n}\right)^n\right]=(4;6{,}25;8;9{,}38;10{,}48;...)$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{3}}\right)^{\frac{n}{3}}\right]^{\frac{3}{n}.n}=e^3$$

Es convergente, por lo tanto está acotada, el supremo es e^3, y el ínfimo es 4. La sucesión es monótona creciente y converge a su supremo.

3) Dada la sucesión $(a_n)_{n\in\aleph}$ / $\frac{2n^2+3n+1}{3n^3+n-2}\le a_n\le\frac{3^n}{n!}$, estudiar la convergencia de $(a_n)_{n\in\aleph}$.

Calculamos el $\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^2+3n+1}{3n^3+n-2}=0$. La convergencia de la sucesión

$\left(\frac{3^n}{n!}\right)_{n\in\aleph}$ puede analizarse aplicando el criterio de D'Alambert.

$\lim_{n\to+\infty}\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}.\frac{n!}{3^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{n+1}=0<1$, entonces la sucesión converge a 0.

Ambas sucesiones convergen a 0, finalmente aplicando el teorema de intercalación podemos afirmar que $(a_n)_{n\in\aleph}$ también converge a 0.

4) Dada las sucesiones:

$(a_n)=\left[\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n\right]$ y $(b_n)_{n\in\aleph}$ / $\frac{n^4+2n^2+1}{3n^2+2n^4+2}\le\frac{b_{n+1}}{b_n}\le\frac{1}{2}+a_n$, estudiar la convergencia $(a_n)_{n\in\aleph}$ y de $(b_n)_{n\in\aleph}$.

Calculamos el $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n=0$. Por lo tanto (a_n) converge a 0.

Calculamos el $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^4+2n^2+1}{3n^2+2n^4+2}=\frac{1}{2}$. Teniendo en cuenta que el $\lim_{n\to+\infty}a_n=0$ y aplicando el teorema de la intercalación podemos concluir que: $\lim_{n\to+\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{1}{2}$.

Como este límite es menor que 1, aplicando el criterio de D`Alambert podemos afirmar que la sucesión $(b_n)_{n\in\aleph}$ converge a 0.

5) Dada la sucesión $(a_n)_{n\in\aleph}$ / $a_n=\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)^{n^2}$, estudiar la convergencia de la sucesión $(b_n)_{n\in\aleph}$ / $b_n\ge a_n$ $\forall n\in\aleph$.

$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)^{n^2}=+\infty$, por lo tanto la sucesión $(a_n)_{n\in\aleph}$ es divergente.

Como $b_n\ge a_n$ $\forall n\in\aleph$, resulta también divergente la sucesión $(b_n)_{n\in\aleph}$.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1) Escribir los 4 primeros términos de las siguientes sucesiones, dado el término enésimo.

a) $a_n = \dfrac{n^2-1}{n+1}$ b) $a_n = \dfrac{(-1)^n \cdot n}{n^2+3}$ c) $a_n = \dfrac{n^2-n+3}{2n}$

2) Escribir el término general de cada una de las siguientes sucesiones

a) $(a_n) = (9; -27; 81; -243; \dots)$ b) $(a_n) = \left(1; \dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{8}; \dots\right)$

c) $(a_n) = (-1; 1; -1; 1; \dots)$ d) $(a_n) = (2; 9; 28; 65; \dots)$

e) $(a_n) = \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{2}{3}; \dfrac{3}{4}; \dfrac{4}{5}; \dots\right)$

3) Dada la sucesión $(a_n) = \left(2 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right)$, representarla gráficamente para $n = 1, 2, 3, \dots, 10$ y calcular el número que permite afirmar que $a_n - 2 < 0{,}25$ para todo n mayor que dicho número.

4) Calcular el límite de las siguientes sucesiones

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$ b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}$ c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{3}{n}\right)^n$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\dfrac{n+1}{n^2+2n+1}}$ e) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n}{n+3}$ f) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}\right)$

g) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^n$ h) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\dfrac{2}{n}\right)^{n^2}$ i) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n.(n+4)} - n\right)$

j) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2n-1}{2n+4}\right)^{3n+2}$ k) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+2\sqrt{n-1}} - \sqrt{n-1}\right)$

l) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n^2+2}}$ m) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{3n-1}{4n+2}\right)^n$

5) Determinar si las siguientes sucesiones son convergentes

a) $(a_n) = \left(\dfrac{3^n}{n}\right)$ b) $(a_n) = \left(\dfrac{1-2^n}{2^n}\right)$ c) $(a_n) = \left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)$

d) $(a_n) = \left(\sqrt{3n-1} - \sqrt{n+1}\right)$ e) $(a_n) = \left(\dfrac{n^2+1}{n^2-2}\right)^{\frac{n^2+3n+1}{2}}$

f) $(a_n) = \left[4 + sen\,(n\pi)\right]$

6) Elegir la opción correcta

a) Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones tales que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, $b_n > 0$ $\forall n \in \aleph$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty$ y $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n \cdot b_n) = 5$ entonces:

A) (b_n) *converge* B) $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = -\infty$

C) (b_n) *diverge* D) (b_n) está acotada pero no tiene límite.

b) Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones tales que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ y $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{b_n}{a_n} = 3$, entonces:

A) $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 3$ B) $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$

C) $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = -\infty$ D) (b_n) está acotada pero no tiene límite.

7) Si la sucesión (a_n) verifica $\dfrac{4n^2-7n^3+3}{3n^2+8n-5} \geq a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, calcular $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[\left(\dfrac{5}{3}\right)^{a_n} - \dfrac{5n}{3^n}\right]$.

8) Si la sucesión (a_n) verifica $\left(\dfrac{3n+5}{3n+2}\right)^{3n^2} \le a_n,\ \forall n\in\mathbb{N}$, calcular $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt[n]{3n^2}-\dfrac{5}{3a_n}\right)$.

9) Probar que la abscisa del punto de inflexión de la función definida por $F(x)=\int_a^{x-1}\dfrac{t+1}{t^2}.dt$ con $a>0$, coincide con el límite de la sucesión (a_n) tal que $a_n=\dfrac{5+n-2n^2}{2n^2-2n+1}$.

RESPUESTAS

1) a) $(a_n)=(0;1;2;3;...)$ b) $(a_n)=\left(-\dfrac{1}{4};\dfrac{2}{7};-\dfrac{1}{4};\dfrac{4}{19};...\right)$

c) $(a_n)=\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{5}{4};\dfrac{3}{2};\dfrac{15}{8};...\right)$

2) a) $a_n=(-3)^{n+1}$, b) $a_n=\dfrac{1}{2^{n-1}}$, c) $a_n=(-1)^n$, d) $a_n=n^3+1$,

e) $a_n=\dfrac{n}{n+1}$

3) $n=4$

4) a) ∞; b) 1; c) e^3; d) 0; e) 2; f) 1; g) e^{-1}; h) 0; i) 2; j) $e^{-7,5}$; k) 1; l) 0; m) $e^{-5/8}$

5) a) div. , b) conv. a –1, c) conv. a 1, d) div., e) conv a $e^{3/2}$, f) oscila entre 3 y 4

6) a) C, b) C   7) 0   8) 1

SERIES

SERIES NUMÉRICAS

Dada una sucesión de números reales $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ / $(a_n)=(a_1;a_2;a_3;...;a_n;...)$ si obtenemos sus sumas parciales:

$$S_1=a_1$$
$$S_2=a_1+a_2$$
$$....$$
$$S_n=a_1+a_2+...+a_n$$

Se denomina serie numérica a la sucesión de sumas parciales

$$(S_n)_{n\in\aleph}=(S_1;S_2;...;S_n;...)$$

El objetivo de este tema es analizar la convergencia de las series numéricas, para lo cual debemos evaluar el $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Clasificación

Pueden presentarse los siguientes casos:

Si el $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=S$ la serie es **convergente**, S es la suma de la serie.

Si el $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=\infty$ la serie es **divergente.**

Si el $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ no existe, la serie es **oscilante**.

Para denotar a una serie se utiliza la notación

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots+$$

Los a_i son los términos de la serie, a_n es el término enésimo.

De lo cual se deduce que: $S=\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\lim_{n\to+\infty} S_n$ (siempre que éste exista).

Obtener la expresión de la suma de los n primeros términos (S_n) no siempre es posible. Cuando se puede obtener la expresión de (S_n), como ocurre en el caso de las series geométricas, analizar la convergencia de una serie es más sencillo.

Nota: La convergencia o divergencia de una serie no se altera si se añade o elimina un número finito de términos.

Series Geométricas

La serie geométrica tiene la siguiente forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_1.q^n=a_1+a_1.q+a_1.q^2+a_1.q^3+\ldots+a_1.q^{n-1}+\ldots+ \quad con \quad a_1\neq 0$$

Cada término de la serie se obtiene de multiplicar al anterior por una constante llamada razón q.

Vamos a analizar la convergencia de la serie geométrica. Obtenemos primero la expresión de la suma de los n primeros términos S_n para luego calcular el límite.

$$S_n = a_1+a_1.q+a_1.q^2+\ldots+a_1.q^{n-1}$$

$$q.S_n = a_1.q+a_1.q^2+a_1.q^3+\ldots+a_1.q^n \quad restando$$

$$S_n.(1-q)=a_1.(1-q^n)$$

$$S_n=a_1.\frac{1-q^n}{1-q} \qquad q\neq 1$$

Calculamos ahora el $\lim_{n\to+\infty} S_n=\lim_{n\to+\infty} a_1.\frac{1-q^n}{1-q}$

1º caso: $-1<q<1$

Si $|q|<1$ $\quad \lim_{n\to+\infty} q^n=0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n=\frac{a_1}{1-q}$, la serie converge y

$$S=\frac{a_1}{1-q}.$$

Ejemplo: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^{n-1}}=3+\frac{3}{2}+\frac{3}{4}+\ldots+\frac{3}{2^{n-1}}+\ldots+\ldots$

$$q=\frac{1}{2} \text{ y } S=\frac{3}{1-\frac{1}{2}}=\frac{3}{\frac{1}{2}}=6.$$

Cuantos más términos se consideran de la serie, más la suma se aproxima a 6.

2º caso: $|q|>1$

Si $|q|>1$ $\quad S=\lim_{n\to+\infty} q^n=\infty \Rightarrow$ que la serie es **divergente**.

Si $a_1>0$ $\quad S=\lim_{n\to+\infty} S_n=+\infty$, si $a_1<0$ $\quad S=\lim_{n\to+\infty} S_n=-\infty$

Ejemplos: a) $1+3+9+27+\ldots+3^{n-1}\ldots+\ldots$ $\quad q=3,\ S=+\infty$
b) $1-2+4-8+16-\ldots+(-2)^{n-1}+\ldots$ $\quad q=-2, S=+\infty$
c) $-2+4-8+16-\ldots+(-2)^n\ldots$ $\quad q=-2, S=-\infty$

3º caso: $q=1$

$$S_n=a_1+a_1+a_1+\ldots+a_1=a_1.n$$

$$S=\lim_{n\to+\infty} S_n=\lim_{n\to+\infty} a_1.n=\begin{cases}+\infty & si\ a_1>0\\ -\infty & si\ a_1<0\end{cases} \Rightarrow$$ la serie es **divergente**.

4º caso: $q = -1$

$S_n = a_1 - a_1 + a_1 - a_1 + ... + (-1)^n a_1 + ...$

$S_n = 0$ si n es par, $S_n = a_1$ si n es impar $\Rightarrow$ no hay límite, por lo tanto la serie es **oscilante**.

Una aplicación

Calcular el límite de la sucesión: $a_1 = 0{,}27$, $a_2 = 0{,}2727$, $a_3 = 0{,}272727$
Para conocer el límite de la sucesión, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$, debemos conocer a_n.

Podemos pensar a a_n como $0{,}27 + 0{,}0027 + 0{,}000027 + ... =$

$= \frac{27}{10^2} + \frac{27}{10^4} + \frac{27}{10^6} + ...$, tenemos una serie geométrica de razón $\frac{1}{10^2}$,

por lo tanto $a_n = S_n$. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S = \dfrac{0{,}27}{1-\frac{1}{10^2}} = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$.

Serie telescópica

La serie telescópica tiene la siguiente forma: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1})$.

Esta serie tiene la particularidad de que, al igual que en la serie geométrica, su suma se puede calcular, en efecto:

$$S_n = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + ... + (b_{n-1} - b_n) + (b_n - b_{n+1}) = b_1 - b_{n+1}$$

Los términos se van anulando, quedan el primero y el último. Esto permite calcular la suma de la serie.

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} (b_1 - b_{n+1}) = b_1 - \lim_{n\to+\infty} b_{n+1}$$

Vemos que es convergente si y sólo si $\lim\limits_{n\to+\infty} b_{n+1} = l$ finito, o sea la sucesión $\{b_n\}$ es convergente.

Ejemplo

Analizar la convergencia y suma de la siguiente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$$

Desarrollamos algunos términos y calculamos S_n:

$$S_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - ..... - \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Vemos que es una serie telescópica, calculamos el $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0$, por lo tanto la serie es convergente y $S = 1 - 0 = 1$.

A veces hay series que se pueden transformar en telescópicas.

Ejemplo: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \right)$

Podemos agrupar los términos de forma que tengamos una serie telescópica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\sqrt{n} - \sqrt{n+1} \right) - \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2} \right) \right]$$

Vemos que es una serie telescópica. Calculamos el límite:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2} \right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2} \right) . \left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} \right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1) - (n+2)}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} = 0 \Rightarrow S = 1 - \sqrt{2}$$

Propiedades de las Series Convergentes

a) Condición necesaria de convergencia (C.N.C.)

Una serie es convergente $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ (el recíproco no es válido).

Demostración

La serie es convergente $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = l$

La serie es convergente $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} S_{n-1} = l$

Por lo tanto $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n - \lim\limits_{n\to+\infty} S_{n-1} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} (S_n - S_{n-1}) = 0$

Pero $\lim\limits_{n\to+\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$

Corolario: el $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow$ la serie no es convergente.

Ejemplo: para analizar la convergencia de

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n = 2+4+8+\ldots+2^n+\ldots$, calculamos el $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = \infty$ por lo tanto la serie no converge.

El recíproco de esta propiedad no es válido.

Ejemplo: la serie armónica es $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{n}+\ldots+$, el $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ y la serie no converge. Veremos más adelante que la serie es divergente.

Conclusión: si el término general tiende a 0 nada se puede asegurar respecto de la convergencia de la serie, pero si el término general no tiende a 0 podemos asegurar que la serie no es convergente.

b) linealidad

Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ son dos series convergentes y $k \in \Re$ entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} k.a_n$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ también convergen y además se verifica que:

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} k.a_n = k.\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$

c) sumas parciales acotadas

Una serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ de términos no negativos converge si y sólo sí sus sumas parciales tienen una cota superior.

Series de Términos Positivos

Se llama así a las series cuyos términos son positivos o ceros. Son convergentes o divergentes, nunca oscilantes.
Para clasificar estas series podemos aplicar los siguientes criterios.

a) Criterio de comparación de Gauss (o de la serie mayorante y minorante)

i) Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ son dos series numéricas de términos positivos, $\forall n \in \mathbb{N}$: $a_n \leq b_n$ y además $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ converge con suma S, entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ también converge y su suma no supera a S. La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ se llama serie mayorante de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Ejemplo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots +$$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge por ser una serie geométrica de razón $q = \frac{1}{2}$.

Como $\forall n \in \mathbb{N}$: $a_n \leq b_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es **convergente**.

ii) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son dos series numéricas de términos positivos, $\forall n \in \mathbb{N}$: $a_n \geq b_n$ y además $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también diverge. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es una serie minorante de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Ejemplos

a) *La serie armónica es divergente*

Utilizamos este criterio para probar que la serie armónica es divergente.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots +$$

Se verifica $\forall n \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{n} \geq b_n$

Analizamos ahora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Observamos que la suma de los términos con el mismo denominador suman $\frac{1}{2}$. La serie se puede expresar así: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots +$

A partir del 2º término la nueva serie es geométrica de razón 1 por lo tanto es divergente, por lo tanto la serie armónica es divergente.

b) $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots +$$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es la serie armónica que diverge, como además $\forall n \in \mathbb{N}$: $a_n \geq b_n$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.



GAUSS, *Karl Friedrich (1777-1855):* fue uno de los más grandes científicos de la historia (sus parangones hay que buscarlos en Arquímedes, Newton o Einstein). De origen muy humilde, hijo de un jornalero pobre, fue astrónomo, físico y matemático alemán excepcional. Sus padres lo destinaron al trabajo manual pero trabó amistad con el duque Wihelm que, impresionado por su inteligencia científica le costeó sus estudios, primero en la escuela y luego en la Universidad de Gotinga. Calificó a la Matemática como *Reina de las ciencias* y a él se lo llamó el *Príncipe de los matemáticos*. A los 18 años crea un método para el trazado gráfico del eptadecágono con regla y compás. Introduce los números complejos en el Análisis y realiza un estudio riguroso de las series. En su tesis doctoral de 1799 demuestra el *Teorema Fundamental del Algebra*. El monumento levantado en su homenaje en la Universidad de Gotinga, de la cual fue director, está sobre un pedestal cuya sección es un polígono regular de 17 lados.

b) Criterio de comparación en el límite

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son dos series numéricas de términos positivos, $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$ y

i) l es finito y positivo, entonces las dos series son ambas convergentes o ambas divergentes.

ii) $l = 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

iii) l es infinito $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es divergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

Este criterio es útil si se conoce la convergencia de una de ellas.

La serie armónica generalizada

Así se puede probar la convergencia de la serie armónica generalizada: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{an+b}$ con $a > 0$.

Calculamos el límite del cociente: $\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{an+b}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{an+b}{n} = a$, como el límite es un número finito y la serie armónica es divergente entonces la serie armónica generalizada también es divergente.

Criterio de D'Alambert (o criterio del cociente)

Si $\sum a_n$ es una serie de términos positivos y el $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = l$, entonces

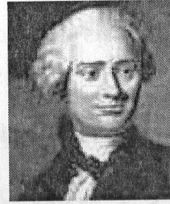
si: $\begin{cases} l < 1 \text{ converge} \\ l > 1 \text{ diverge} \\ l = 1 \text{ no se sabe} \end{cases}$

Ejemplos: Analizamos la convergencia de

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n} = \frac{1}{5} + \frac{2}{25} + \frac{3}{125} + \ldots + \frac{n}{5^n} + \ldots$

Calculamos el $\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n}{5^n}}{\frac{n-1}{5^{n-1}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{5^n} \cdot \frac{5^{n-1}}{n-1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{5.(n-1)} = \frac{1}{5} < 1$

luego, la serie **converge**.



D'ALAMBERT, *Juan Le Rond (1717-1783)*: científico, filósofo y literato francés que nació y murió en París, es quién formula por primera vez el *Teorema Fundamental del Algebra* demostrado posteriormente por Gauss.
Su nombre proviene del nombre de una iglesia (Saint Jean le Rond) en las gradas de la cual se había descubierto un niño abandonado por su madre, una aristócrata dama de la cual era hijo natural. Es el continuador directo de las ideas de Leibniz y Newton.
Ingresó a la Academia de Ciencias de París en 1741 y poco después a la de Berlín. Dio un paso muy importante en el campo de la teoría de las funciones al aclarar que el argumento y los valores de una función pueden ser reales o complejos.

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{n^2+1} + \ldots$

Calculamos el $\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n^2+1}}{\frac{1}{(n-1)^2+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2-2n+2}{n^2+1} = 1$, no se sabe.

Criterio de Raabe

Si $\sum a_n$ es una serie de términos positivos y el $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[n.\left(1-\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)\right]=l$,

entonces si $\begin{cases} l>1 & \textit{converge} \\ l<1 & \textit{diverge} \\ l=1 & \textit{no se sabe} \end{cases}$

Ejemplo: Analizamos la convergencia de: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$

calculamos el $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[n.\left(1-\frac{n^2-2n+2}{n^2+1}\right)\right]=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n^2-n}{n^2+1}=2>1$

$\Rightarrow$ que la serie converge.

El análisis de la convergencia que no pudo hacerse con el criterio de D'Alambert pudo hacerse con el criterio de Raabe.

Criterio de la raíz Cauchy

Si $\sum a_n$ es una serie de términos positivos y el $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$,

entonces si: $\begin{cases} l<1 & \textit{converge} \\ l>1 & \textit{diverge} \\ l=1 & \textit{no se sabe} \end{cases}$

Ejemplo: analizamos la convergencia de: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$, calculamos el

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0<1 \Rightarrow$ la serie converge.

Criterio de la integral de Cauchy

Este es otro criterio para analizar la convergencia de una serie de términos positivos.

Sea f una función continua, decreciente, positiva $\forall x \geq 1$ y además $\forall n: a_n = f(n)$, entonces la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n) = f(1)+f(2)+f(3)+....+$ *es convergente si la integral impropia* $\int_1^{+\infty} f(x).dx$ converge.

Si $\int_1^{+\infty} f(x).dx$ *es divergente, entonces la serie diverge.*

Las series p

Se denominan así a las series del tipo: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ con $p\in\Re$.

Si $p=1$, tenemos la serie armónica, como ya vimos es $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, los términos de la serie son no crecientes, la función que cumple con las condiciones establecidas por Cauchy es $f(x)=\frac{1}{x}$, que es continua en $[1;+\infty)$.

$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}.dx=\lim\limits_{t\to+\infty}\int_1^t\frac{1}{x}.dx=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\ln x\right]_1^t\right)=\lim\limits_{t\to+\infty}(\ln t-\ln 1)=\infty$, por lo tanto la serie diverge.

Ahora analizamos la convergencia de estas series para $p>0$ y $p\neq1$.

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}.dx=\lim\limits_{t\to+\infty}\int_1^t\frac{1}{x^p}.dx=\lim\limits_{t\to+\infty}\int_1^t x^{-p}.dx=\lim\limits_{t\to+\infty}\left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^t=$$

$$=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\frac{t^{-p+1}}{-p+1}-\frac{1}{-p+1}\right)$$

$p > 1$: $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\frac{t^{-p+1}}{-p+1} - \frac{1}{-p+1}\right) = -\frac{1}{-p+1} \Rightarrow$ la serie es convergente

$p < 1$: $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\frac{t^{-p+1}}{-p+1} - \frac{1}{-p+1}\right) = \infty \Rightarrow$ la serie es divergente

Si $p < 0$ no se cumple la condición necesaria de convergencia por lo tanto la serie es divergente, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p} = \infty$.

SERIES ALTERNADAS

Si los términos de una serie son alternadamente positivos y negativos la serie recibe el nombre de *serie alternada*. Pueden presentarse de dos maneras:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} . a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + (-1)^{n+1} a_n - \ldots$ siendo $\forall n$: $a_n > 0$.

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} . a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + (-1)^{n} a_n \ldots$ siendo $\forall n$: $a_n > 0$.

Para analizar la convergencia de este tipo de series utilizamos el criterio de **Leibniz.**

Criterio de Leibniz

Si la serie es de términos no crecientes (en valor absoluto) y el $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ *entonces la serie es* ***convergente.***

Para el caso a) la suma es positiva y no supera al 1° término, que actúa como cota superior. $0 < S \le a_1$

Para el caso b) la suma es negativa y supera al 1° término, que actúa como cota inferior. $-a_1 \le S < 0$

Nota: *Si la serie es de términos no crecientes (en valor absoluto) y el* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \neq 0$ *entonces la serie* ***no converge.***

Ejemplos

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n!} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots + (-1)^{n+1} . \frac{1}{n!} + \ldots -$

Como los términos (en valor absoluto) son no crecientes, y el $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0$, la serie es **convergente**.

Además la suma de la serie no supera al primer término que es 1.

Veamos algunos ejemplos:

$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} = 0{,}625$. Si consideramos la suma de los 4 primeros términos tenemos 0,625 que es menor a 1 (el primer término).

$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} \cong 0{,}633$. Si consideramos la suma de los 5 primeros términos tenemos 0,633 que es menor a 1 (el primer término).



LEIBNIZ, *Wilhelm Gottfried (1646-1716):* fue filósofo, matemático, científico natural e inclusive teólogo y político alemán, nacido en Leipzig. Pasó la mayor parte de su vida al servicio de una familia ducal. Fue uno de los grandes genios de la humanidad. A los 20 años obtuvo el grado de doctor en derecho, a los 38 años publica su primera obra sobre el *Cálculo Infinitesimal* y dos años más tarde sobre el *Cálculo Integral.* Hizo grandes aportes en la lógica matemática, en la teoría de los determinantes, el Algebra y la Combinatoria. Pero su aporte indiscutible fue al Cálculo Infinitesimal, lo que lo hace más importante entre nosotros. Las palabras *derivada* y *diferencial* se deben a él. Fundó la Academia de Ciencias de Berlín.

b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots+(-1)^n.\frac{1}{2^n}+\ldots$

En este caso por ser una serie geométrica de razón $q=-\frac{1}{2}$ podemos calcular la suma $S=\frac{-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=-\frac{1}{3}>-\frac{1}{2}$.

Vemos que la suma supera al primer término que es –1/2.

Propiedad

Para las series alternadas convergentes la suma parcial S_n resulta una aproximación útil de la suma exacta S. El error que se comete, al reemplazar la suma S por la suma parcial S_n no supera, en valor absoluto, al primer término despreciado.

Es decir que: $|S-S_n|\le a_{n+1}$. (ya vimos que los $a_i\ge 0$).

Consideremos el ejemplo a) anterior:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n!}=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}\ldots+(-1)^{n+1}.\frac{1}{n!}+\ldots-$$

a) Si consideramos los 4 primeros términos, $|S-S_4|\le a_5$, lo que significa que $|S-0{,}625|\le\frac{1}{120}\cong 0{,}0083$, eso quiere decir que el error que se comete al "cortar" en el 4to. término es, en valor absoluto, menor que $\frac{1}{120}$.

Es decir que la suma exacta está entre 0,625 – 0,0083 y 0,625 + 0,0083, o sea que $0{,}6167\le S\le 0{,}6333$. Podemos asegurar, con un decimal exacto, que $S=0{,}6$.

b) Si consideramos los 5 primeros términos, $|S-S_5|<a_6$, lo que significa que $|S-0{,}633|\le\frac{1}{720}\cong 0{,}00139$, eso quiere decir que el error que se comete al "cortar" en el 5to. término, en valor absoluto, es menor que $\frac{1}{720}$.

Es decir que la suma exacta S está entre 0,633 – 0,00139 y 0,633 + 0,00139, o sea que $0{,}63161\le S\le 0{,}63439$. Podemos asegurar los dos primeros decimales.

Si seguimos considerando más términos podemos acotar aún más el error.

Consideremos ahora el ejemplo b) anterior:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\frac{1}{64}-\ldots+(-1)^n.\frac{1}{2^n}+\ldots-$$

Si sumamos los 5 primeros términos tenemos:

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}=-\frac{11}{32}=-0{,}34375$$

En este caso, por ser una serie geométrica, pudimos calcular la suma. Si hacemos la diferencia entre la suma S y la suma S_5 vemos que se verifica que $|S-S_5|\le a_6$.

$$\left|-\frac{1}{3}-\left(-\frac{11}{32}\right)\right|=0{,}0104<0{,}015625$$

Es decir que la suma exacta S está entre $-0{,}34375-0{,}015625$ y $-0{,}34375+0{,}015625$, o sea que $-0{,}359375\le S\le -0{,}328125$.
Lo cual sabemos que es cierto porque ya vimos que $S=-0{,}333333$.
Hasta acá podemos asegurar un decimal exacto. $S=-0{,}3$.

Convergencia absoluta y condicional

Para cada serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ se puede obtener la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}a_n\right|=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, que es la formada por los valores absolutos de sus términos. Si la serie inicial $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ converge con suma *S* y además:

a) la serie $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ converge, se dice que la serie inicial $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ es ***absolutamente convergente*** y converge con suma menor que *S*.

b) la serie $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ no converge, entonces la serie inicial $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ es ***condicionalmente convergente.***

Teoremas

a) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ converge $\Rightarrow$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ también converge y lo hace en forma absoluta.
Esto es fácil de ver ya que si en la serie donde todos los términos se suman, la suma converge a un número finito, en la serie donde hay términos que se restan, la suma de los términos tiene que ser menor.

b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ diverge $\Rightarrow$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ también diverge.
Esto también es fácil de ver ya que si en la serie donde hay términos que se restan, la suma diverge, en la serie donde todos los términos se suman, la serie también debe ser divergente.

Nota*: otro método para analizar la convergencia de una serie alternada, especialmente cuando no es de fácil aplicación el criterio de Leibniz, es analizar la convergencia de la serie de los valores absolutos utilizando los criterios vistos para serie de términos positivos. Si ésta converge, por este teorema, la serie original también converge.*

Ejemplos: a) analizar convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n.\frac{3^{2n+1}}{n^{2n}}$

analizamos la convergencia de la serie de los valores absolutos aplicando el criterio de la raíz:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3^{2n+1}}{n^{2n}}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3^{2+\frac{1}{n}}}{n^2}=0<1$$

entonces esta serie es convergente, por lo tanto, por el teorema, la serie alternada es convergente y es absolutamente convergente.

b) analizar convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n.\frac{2n}{e^n}$

analizamos la convergencia de la serie de los valores absolutos, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{e^n}$, aplicando el criterio de D'Alambert:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{2n}{e^n}}{\frac{2(n-1)}{e^{n-1}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{n-1}}{2n-2}.\frac{2n}{e^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n}{2n-2}.\frac{e^{n-1}}{e^n}=\frac{1}{e}<1,$$

esta serie es convergente, por lo tanto, por el teorema, la serie alternada es convergente y es absolutamente convergente.

Propiedad de la convergencia absoluta

Si una serie es absolutamente convergente, sigue siendo absolutamente convergente con cualquier cambio del orden de sus términos. En este caso, la suma de la serie no depende del orden de los términos.

EJERCICIOS RESUELTOS

1) Estudiar la convergencia de las series

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n.(n+1)}$ Se puede llevar a una serie telescópica

Descomponemos la fracción en otras más simples:

$$\frac{1}{n.(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} \Rightarrow \frac{1}{n.(n+1)} = \frac{A(n+1)+Bn}{n.(n+1)}$$

de donde surge que $A = 1$ y $B = -1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n.(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$

La suma parcial n-ésima es: $S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ y $\lim_{n \to +\infty} S_n = 1 \Rightarrow$ es convergente y su suma es igual a 1.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+1}$

como el $\lim_{n \to +\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1 \neq 0$, la serie es divergente por C.N.C.

c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n.ln\, n}$

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\, ln\, x} = \lim_{t \to +\infty} \int_2^t \frac{dx}{x\, ln\, x} = \lim_{t \to +\infty} ln(ln\, x)\Big]_2^t = \lim_{t \to +\infty} [ln(ln\, t) - ln(ln\, 2)] = \infty.$$

Luego la serie dada es divergente.

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^5}$

Aplicando el criterio de D'Alambert:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)^5} \frac{n^5}{2^n} = 2. \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^5 = 2 > 1 \text{, es divergente.}$$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen\, n}{n^3}$

Los signos de los términos de la serie, varían de modo aleatorio. No se trata, por tanto, de una serie alternada. Sin embargo, si tenemos en cuenta que: $\left| \frac{sen\, n}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3}$ y que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ es una serie p, con $p = 3$ y por tanto es convergente, por el criterio de comparación, la serie dada resulta convergente.

2) Sabiendo que la suma de los n primeros términos de la serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ está dada por: $S_n = \frac{n}{n+1}$, estudiar la convergencia de dicha serie y determinar el término a_5.

$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$, luego la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente y converge a 1.

Como $a_5 = S_5 - S_4$, reemplazando en la fórmula de la suma n-sima, se tiene $a_5 = \frac{5}{6} - \frac{4}{5}$. Resulta $a_5 = \frac{1}{30}$.

3) Pruebe que la serie $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{2.3^2}+\frac{1}{3.3^3}+...$ es convergente.

La serie dada es: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n3^n}$. La comparamos con la serie geométrica $\frac{1}{3^n}$, de razón $q=\frac{1}{3}<1$, por lo tanto es convergente.

Se tiene $\frac{1}{n3^n}\leq\frac{1}{3^n}$ para $n\geq 1$. Luego la serie dada es convergente por serlo la geométrica con la que se ha comparado.

4) Clasificar la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ y utilizar el resultado para calcular el $\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{n^n}$.

Aplicamos el criterio de D'Alambert:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n!}{n^n}}{\frac{(n-1)!}{(n-1)^{n-1}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n.(n-1)!}{(n-1)!}.\frac{(n-1)^{n-1}}{n^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n-1)^{n-1}}{n^{n-1}}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}.$$

Llegamos a una indeterminación del tipo 1^{∞}. Resolvemos con el número e.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}=\lim_{n\to+\infty}\left[\left[\left(1+\frac{1}{-n}\right)^{-n}\right]^{\left(\frac{n-1}{-n}\right)}\right]=e^{-1}$$

Como $e^{-1}<1$ entonces la serie es convergente.

Por ser la serie convergente $\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{n^n}=0$.

Serie de Potencias

Las series de funciones son de la forma $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$.

Un ejemplo de estas series son un tipo de serie de Fourier cuya forma es: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sen(nx)}{n^2}=\frac{sen\,x}{1}+\frac{sen(2x)}{4}+\frac{sen(3x)}{9}+....$

En el estudio de las series de funciones interesan dos cuestiones:

a) Determinar los valores de x para los cuáles la serie numérica resultante es convergente.
b) Encontrar la función a la cuál la serie converge.

La serie de potencias es un caso particular de las series de funciones, en las cuales los términos son funciones de $\boldsymbol{x}$. La serie de potencias tiene la siguiente expresión:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n.(x-a)^n$$

Los a_i son los coeficientes de la serie.
Para cada valor de x se obtiene una serie numérica. Estas series numéricas pueden ser convergentes, divergentes u oscilantes. El objetivo es determinar los valores de x para los cuales la serie es **convergente**.

Casos que se presentan

a) la serie sólo converge para $x=a$ (*todas las series de este tipo convergen para* $x=a$ *porque la suma es* 0).
b) la serie converge para todo número real x.
c) la serie converge para algunos valores de x y no lo hace para otros.

En este caso converge $\forall x\,/\,|x-a|<R$, donde R se denomina radio de convergencia.

Ejemplos: $\sum_{n=0}^{\infty} n!.(x-1)^n$ sólo converge si $x = 1$.

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge $\forall x$.

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge sólo si $|x| < 1$.

Teorema de Abel

a) Si la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n.(x-a)^n$ *converge para el valor de* $x_0 \neq a$, *entonces converge* $\forall x / |x-a| < |x_0 - a|$.

b) Si la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n.(x-a)^n$ *diverge para el valor de* $x_0 \neq a$, *entonces diverge* $\forall x / |x-a| > |x_0 - a|$.

Lo cual quiere decir que la serie es convergente para un intervalo simétrico respecto de *a*, llamado **intervalo de convergencia**. La semiamplitud del intervalo se llama radio de convergencia **R**.

diverge **converge** **diverge**

------------(------*a*------)------------

a–R **a+R**

Si la serie converge solamente para $x = a$, el radio de convergencia R es 0 y el intervalo de convergencia es nulo. Si la serie converge para todo x, el radio de convergencia es ∞ y el intervalo de convergencia son todos los números reales.

Si la serie converge solamente para algunos valores de x y no converge para otros, el intervalo de convergencia es $(a-R\ ;\ a+R)$[1] y $a+R$ es el mayor valor de x para el cual puede converger la serie.

[1] Veremos más adelante si el intervalo es abierto, cerrado o semiabierto.



ABEL, *Niels Henrik (1802-1829)*: fue un matemático noruego que con Galois inicia el nuevo enfoque del Algebra.
Tuvo una vida corta pero fructífera.
Murió de tuberculosis a los 27 años y tuvo que hacerse cargo de una familia numerosa al morir su padre.
Sus aportes se refieren a la teoría de series, integrales, etc. En 1824 demostró que las ecuaciones de grado mayor a 4 son irresolubles por fórmulas radicales. Este descubrimiento ya lo había apuntado Gauss en 1799. Dijo *las series divergentes son un invento del diablo.*

Cálculo del radio de convergencia

Consideramos la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n.(x-a)^n$ que sabemos que converge si $\sum_{n=0}^{\infty} \left|(-1)^{n+1} a_n.(x-a)^n\right| = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.(x-a)^n$ converge.

Si existe el $\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_n.(x-a)^n}{a_{n-1}.(x-a)^{n-1}} \right|$, para cada valor de x es:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} |x-a|$$

Aplicando el criterio de D'Alambert, si $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} |x-a| < 1$ la serie converge.

Por lo tanto converge $\forall x /\ -\dfrac{1}{\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}} + a < x < \dfrac{1}{\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}} + a$.

Si llamamos el $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=l$, tenemos que la serie converge $\forall x /\ a-\frac{1}{l}<x<a+\frac{1}{l}$.

El radio de convergencia es $R=\frac{1}{l}$ y el intervalo de convergencia es $\left(a-\frac{1}{l};a+\frac{1}{l}\right)$. Luego analizaremos que pasa si $x=a\pm R$.

Si $l.|x-a|>1$ entonces la serie diverge $\forall x: |x-a|>\frac{1}{l}$.

Si $l=\infty$ entonces la serie converge sólo para $x=a$.

Si $l=0$ entonces la serie converge $\forall x$ real.

Observación: *como el criterio de D'Alambert no asegura la convergencia si* ***l*** *=1, el intervalo de convergencia que se obtiene por este procedimiento es abierto. Para saber que ocurre en los extremos del intervalo hay que analizar la convergencia de las series numéricas que se obtienen de reemplazar en la serie de potencias la variable* ***x*** *por los valores de los extremos del intervalo.*

Ejemplo: analizamos la convergencia de $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n.2^n}$

Calculamos el radio de convergencia:

$$l=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{1}{n.2^n}.x^n}{\frac{1}{(n-1).2^{n-1}}.x^{n-1}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{n-1}{2.n}|x|=|x|\frac{1}{2}<1\Rightarrow |x|<2\Rightarrow R=2$$

Debemos analizar que ocurre en los extremos del intervalo, es decir en $x=-2$ y en $x=2$.

$\underline{x=2}$ se obtiene la siguiente serie numérica: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n.2^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ que es la serie armónica que sabemos que es **divergente**.

$\underline{x=-2}$ se obtiene la serie numérica: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n.2^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ esta serie es una serie alternada, debemos analizar la convergencia utilizando el criterio de **Leibniz**. Vemos que los términos en valor absoluto son no crecientes y que el $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ lo que significa que la serie es **convergente**.

Conclusión: el intervalo de convergencia es [–2;2).

Según como sea la serie, a veces conviene utilizar otros criterios, por ejemplo el de la raíz de Cauchy.

En este caso $l=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ y la serie converge:

$$\forall x / -\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}<x-a<\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

Ejemplo: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n}$

Calculamos el $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(x-1)^n}{n}\right|}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{1/n}}|x-1|<1\ \Rightarrow |x-1|<1$

$-1<x-1<1\Rightarrow\ 0<x<2$.

Estudiamos los extremos:

$\underline{x=0}$

tenemos $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, es una serie alternada, aplicando el criterio de Leibniz es convergente porque los términos son no crecientes y el $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$.

<u>$x=2$</u>

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, es la serie armónica que como ya vimos es divergente.

Por lo tanto I = $[0;2)$

Otros ejemplos

a) hallar el intervalo de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n.\frac{(3x-2)^n}{5^n}$

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{1}{5^n}(3x-2)^n}{\frac{1}{5^{n-1}}.(3x-2)^{n-1}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{3x-2}{5}\right|=\frac{|3x-2|}{5}<1\Rightarrow|3x-2|<5$$

$$\Rightarrow -5<3x-2<5\Rightarrow\frac{-5+2}{3}<x<\frac{5+2}{3}\Rightarrow -1<x<\frac{7}{3}.$$

El intervalo de convergencia por ahora es $\left(-1;\frac{7}{3}\right)$.

Debemos analizar la convergencia en los extremos del intervalo.

<u>$x=7/3$</u> se obtiene la siguiente serie numérica: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n.\frac{5^n}{5^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$

sabemos que es oscilante.

<u>$x=-1$</u> se obtiene la serie numérica: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n.\frac{(-5)^n}{5^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(1)^n$, esta

serie es divergente.

Por lo tanto el intervalo de convergencia es: $\left(-1;\frac{7}{3}\right)$.

b) hallar el intervalo de convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{2n-1}}{2n.4^n}$

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{1}{2n.4^n}(x+5)^{2n-1}}{\frac{1}{2(n-1).4^{n-1}}.(x+5)^{2n-3}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(2n-2).4^n(x+5)^2}{2n.4^n.4}\right|=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n-2}{8n}\left|(x+5)^2\right|=\frac{1}{4}(x+5)^2<1$$

$|x+5|<2\Rightarrow\ -2<x+5<2$ por lo tanto $-7<x<-3$.

El intervalo de convergencia por ahora es $(-7;-3)$.

Debemos analizar la convergencia en los extremos del intervalo.

<u>$x=-7$</u> se obtiene la siguiente serie numérica:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^{2n-1}}{2n.4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n-1}.2^{2n-1}}{2n.4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n-1}.2^{2n}}{4n.4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n-1}}{4n}$$

Es una serie de términos negativos, extrayendo el signo menos de la sumatoria queda $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n}$.

Ya sea por ser la armónica generalizada o utilizando el criterio de la integral de Cauchy, vemos que es divergente.

<u>$x=-3$</u> se obtiene la siguiente serie numérica:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}}{2n.4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}}{4n.4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n}$$

Al igual que en el ejemplo que para $x=-7$, ya sea por ser la armónica generalizada o utilizando el criterio de la integral de Cauchy, vemos que es divergente. El intervalo de convergencia es $(-7;-3)$.

SERIES DE TAYLOR Y MAC LAURIN

Ya se vio en el capítulo 9 la fórmula para desarrollar una función f a través del polinomio de Taylor o Mac Laurin.

Serie de Mac Laurin

Si f tiene derivada finita continua de orden n+1 en el origen, la fórmula de Mac Laurin es:

$$f(x)=f(0)+f'(0).x+\frac{f''(0)}{2!}.x^2+\frac{f'''(0)}{3!}.x^3+\ldots+\frac{f^n(0)}{n!}.x^n+$$
$$+\frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}.x^{n+1} \qquad \text{con } 0<c<x.$$

Es decir que $f(x)=\sum_{h=0}^{n} f^h(0).\frac{x^h}{h!}+T_{n+1}$ (1)

Permite aproximar $f(x)$ a través de un polinomio de grado n en un entorno de $x = 0$.

Si la función f tiene $\forall n\in \aleph$, n derivadas finitas en el intervalo de convergencia I, la siguiente serie de potencias se llama serie de Mac Laurin correspondiente a f.

$$f(x)=\sum_{h=0}^{\infty} f^h(0).\frac{x^h}{h!}, \quad \text{para } x\in \text{I}. \quad (2)$$

Interesa saber en qué condiciones las expresiones (1) y (2) coinciden, es decir cuando $f(x)=\sum_{h=0}^{\infty} f^h(0).\frac{x^h}{h!}$.

La igualdad anterior tiene sentido si la serie de potencias es convergente para los x que se consideran, es decir dentro del intervalo de convergencia. Además el término complementario debe tender a 0.

$$T_{n+1}=f(x)-\sum_{h=0}^{\infty}\frac{f^h(0).x^h}{h!} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} T_{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\left[f(x)-\sum_{h=0}^{n}\frac{f^h(0).x^h}{h!}\right]=$$

$$=f(x)-\lim_{n\to+\infty}\sum_{h=0}^{n}\frac{f^h(0).x^h}{h!}=0\Rightarrow f(x)=\sum_{h=0}^{\infty}\frac{f^h(0).x^h}{h!}$$

Por lo tanto si f es derivable indefinidamente en un intervalo de convergencia I, y además $\lim_{n\to+\infty} T_{n+1}=0$, entonces para cualquier x del intervalo considerado es $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f^n(0).\frac{x^n}{n!}$.

Serie de Taylor

Si en lugar de considerar el punto $x = 0$, consideramos un punto $x = a$, entonces tenemos la serie de Taylor de f:

$$f(x)=\sum_{h=0}^{\infty} f^h(a).\frac{(x-a)^h}{h!}, \quad \text{para } x\in \text{I}.$$

Nota: *La serie de potencias representa a la función f en el intervalo de convergencia. La serie converge a la imagen de la función.*

Ejemplos

a) desarrollar en serie de potencias de x y calcular el intervalo de convergencia si $f(x)=e^x$.

Calculamos las sucesivas derivadas en el origen para obtener la serie correspondiente.

$$f(0)=e^0=1$$
$$f'(x)=e^x \Rightarrow f'(0)=1$$
$$f''(x)=e^x \Rightarrow f''(0)=1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^n(x)=e^x \Rightarrow f^n(0)=1$$
$$f^{n+1}(x)=e^x \Rightarrow f^{n+1}(c)=e^c$$

Reemplazando queda:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Buscamos el intervalo de convergencia dentro del cual la serie representa a la función.

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\frac{x^n}{n!}}{\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}} \right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n-1)!}{n.(n-1)!}|x| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}|x| = 0 < 1 \quad \forall x \in \Re \Rightarrow R = \infty$$

por lo tanto el intervalo de convergencia es $(-\infty;\infty)$.

Para $x = 1$ tenemos el número e.

$$e = e^1 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + ... + \frac{1}{n!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Debemos verificar que el $\lim\limits_{n\to+\infty} T_{n+1} = 0$.

Calculamos $T_{n+1} = \dfrac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}$

Para cada x perteneciente al intervalo de convergencia T_{n+1} se puede considerar como el término enésimo de una sucesión numérica. Aplicamos el criterio de D'Alambert para sucesiones numéricas.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{e^c x^n}{n!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{e^c x^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n!} x = 0 < 1 \Rightarrow$$ la sucesión converge a 0 por lo tanto $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$.

b) desarrollar en serie de potencias de x y calcular el intervalo de convergencia si $f(x) = sen\, x$.

Calculamos las sucesivas derivadas en el origen para obtener la serie correspondiente.

$$f'(x) = cos\, x = sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -sen\, x = sen\left(x + \frac{2\pi}{2}\right) \Rightarrow f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -cos\, x = sen\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow f'''(0) = -1$$

$$f^{iv}(x) = sen\, x = sen\left(x + \frac{4\pi}{2}\right) \Rightarrow f^{iv}(0) = 1$$

....

$$f^n(x) = sen\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \Rightarrow f^n(0) = sen\frac{n\pi}{2}$$

$$f^{n+1}(x) = sen\left(x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right) \Rightarrow f^{n+1}(c) = sen\left(c + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)$$

Reemplazando en la fórmula de Mac Laurin

$$f(x) = sen\ x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Buscamos el intervalo de convergencia dentro del cual la serie representa a la función.

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}{\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}} \right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{x^2}{(2n+1).2n} = 0 < 1 \quad \forall x \in \Re \Rightarrow R = \infty.$$

La serie converge en $(-\infty;\infty)$.

Debemos verificar que el $\lim\limits_{n\to+\infty} T_{n+1}=0$.

Calculamos $T_{n+1}=\dfrac{sen\left(c+(n+1)\dfrac{\pi}{2}\right)x^{n+1}}{(n+1)!}$.

Para cada x perteneciente al intervalo de convergencia T_{n+1} se puede considerar como el término enésimo de una sucesión numérica. Aplicamos el criterio de D'Alambert para sucesiones numéricas.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{sen\left(c+(n+1)\dfrac{\pi}{2}\right)x^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{sen\left(c+n\dfrac{\pi}{2}\right)x^{n}}{n!}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{sen\left(c+(n+1)\dfrac{\pi}{2}\right)}{sen\left(c+n\dfrac{\pi}{2}\right)}.\frac{1}{(n+1).n}.x^2=0<1\Rightarrow$$

la sucesión converge a 0, por lo tanto $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{sen\left(c+(n+1)\dfrac{\pi}{2}\right)x^{n+1}}{(n+1)!}=0$

Ejemplo: Si $x=2$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{(2n+1)!}=sen\ 2$

OTRAS FORMAS DE OBTENER DESARROLLOS EN SERIE

Si analizamos esta serie: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+x^3+....+x^n+....$, vemos que es una serie geométrica de razón x. Por lo tanto converge si $|x|<1$.

Aplicando la fórmula de la suma vista para las series geométricas:

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+x^3+....+x^n+....=\frac{1}{1-x}.$$

Decimos que la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ representa a la función $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ $\forall x$ / $|x|<1$.

Eso quiere decir que dentro del intervalo de convergencia, la serie numérica que se obtiene converge a $f(x)$.

Ejemplo

Si por ejemplo hacemos $x = 1/2$, tenemos la serie numérica

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+$$

Observamos que es una serie geométrica de razón $\dfrac{1}{2}$. Por lo tanto

$$S=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2.$$

Si calculamos $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$ que coincide con la suma de la serie.

Hay otras formas de obtener el desarrollo en serie de una función. Ya sea por sustitución, derivación o integración de una serie conocida bajo ciertas condiciones de convergencia.

Sustitución

Se puede obtener una serie a partir de otra haciendo sustituciones. En este caso el intervalo de convergencia debe ser reformulado.

Ejemplos

a) Ya vimos el desarrollo en serie correspondiente a $f(x)=e^x$.

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+...+\frac{x^n}{n!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\quad \forall x\in\Re$$

Si hacemos $x = -x$, tenemos:

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+...+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}\quad \forall x\in\Re$$

Si hacemos $x=x^2$ en el desarrollo de $f(x)=e^x$.

Tenemos $e^{x^2}=1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}+...+\frac{x^{2n}}{n!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}\quad \forall x\in\Re.$

Si hacemos $x=x^2$ en el desarrollo de $f(x)=e^{-x}$, tenemos:

$$e^{-x^2}=1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}\quad \forall x\in\Re.$$

b) Si consideramos en el desarrollo de $f(x)=\frac{1}{1-x}$ que ya vimos hacemos $x = -x$, tenemos que

$$f(x)=\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+....+(-1)^n.x^n+....=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n.x^n.$$

$|-x|=|x|<1\Rightarrow$ converge $\forall x\in(-1;1)$.

Si ahora hacemos en el desarrollo de $f(x)=\frac{1}{1-x}$, $x=x^2$, tenemos el siguiente desarrollo:

$$f(x)=\frac{1}{1-x^2}=1+x^2+x^4+x^6+....+x^{2n}+....=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}.$$

$|x^2|<1\Rightarrow$ converge $\forall x\in(-1;1)$.

Si ahora hacemos en el desarrollo de $f(x)=\frac{1}{1+x}$, $x=x^2$, tenemos el siguiente desarrollo:

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+....+(-1)^n.x^{2n}+....=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n.x^{2n}$$

$|-x^2|=|x^2|<1\Rightarrow$ converge $\forall x\in(-1;1)$.

Si ahora hacemos en el desarrollo de $f(x)=\frac{1}{1-x}$, $x = 2x$, tenemos el siguiente desarrollo:

$$f(x)=\frac{1}{1-2x}=1+2x+4x^2+8x^3+....+(2x)^n+....=\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n$$

Veamos donde converge, $|2x|<1\Rightarrow|x|<1/2$. $I=(-1/2;1/2)$.

Teorema de derivación

Si consideramos a la serie como un polinomio de infinitos términos, es posible derivarla término a término dentro del intervalo de convergencia. Así $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+...+$, entonces $f'(x)=\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n\right]'=\sum_{n=0}^{\infty}na_n(x-a)^{n-1}$ para $|x-a|<R$. La serie derivada tiene el mismo radio de convergencia que la original. Puede cambiar la convergencia en los extremos del intervalo de convergencia.

Ejemplos

a) A partir del desarrollo en serie de $f(x)=sen\ x$, podemos obtener, derivando la serie, el desarrollo en serie de $g(x)=cos\,x$.

$$f(x)=sen\ x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+....=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\quad \forall x\in\Re.$$

$$g(x)=cos\,x=(sen\ x)'=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+....=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\quad \forall x\in\Re.$$

b) A partir del desarrollo en serie de $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$, podemos obtener, derivando la serie, el desarrollo en serie de $g(x)=\dfrac{-1}{(1-x)^2}$.

$$f(x)=\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+....+x^n+....=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \qquad |x|<1$$

$$g(x)=\frac{-1}{(1-x)^2}=\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\left(1+x+x^2+x^3+....+x^n+....\right)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)'=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}n.x^{n-1}=1+2x+3x^2+...+n.x^{n-1}+....$$

Veamos ahora el intervalo de convergencia de $g(x)$. Sabemos que el radio de convergencia de $g(x)$ es el mismo que el radio de convergencia de $f(x)$, es decir $R=1$. Tenemos que ver que pasa en los extremos del intervalo.

<u>$x=-1$</u> $\sum_{n=1}^{\infty}n.(-1)^{n-1}$, por C.N.C. es divergente.

<u>$x=1$</u> $\sum_{n=1}^{\infty}n.(1)^{n-1}$, por C.N.C. es divergente. Por lo tanto $I=(-1;1)$

Teorema de integración

También una serie de potencias puede integrarse término a término dentro del intervalo de convergencia, podemos así obtener una nueva serie. Si $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+...+$, entonces $g(x)=\int_0^x f(t).dt=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}a_n(t-a)^n.dt=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\dfrac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$, $|x-a|<R$.

La nueva serie tiene el mismo radio de convergencia que la original, hay que investigar la convergencia en los extremos del intervalo.

Ejemplos

a) A partir del desarrollo en serie de $f(x)=\dfrac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n.x^n$ podemos obtener el desarrollo en serie de $g(x)=ln|1+x|$.

$$g(x)=\int_0^x\frac{1}{1+t}dt=ln|1+x|$$

$$ln|1+x|=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n.t^n.dt=\int_0^x\left(1-t+t^2-t^3+...+(-1)^n.t^n+...\right)dt=$$

$$=x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}+...(-1)^n.\frac{x^{n+1}}{n+1}+...=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n.\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

La serie que converge a $f(x)$, lo hace $\forall x\in(-1;1)$ (ver pág. 490). Por lo tanto el radio de convergencia de la serie que converge a $g(x)$ es $R=1$.

Si analizamos la convergencia en los extremos vemos que en $x_0=-1$ es divergente por ser una serie armónica y que en $x_0=1$ es convergente aplicando el criterio de Leibniz, por lo tanto el intervalo de convergencia es $(-1;1]$.

b) A partir del desarrollo en serie de $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n.x^{2n}$ podemos obtener el desarrollo en serie de $g(x)=arc\,tg\,x$.

$$g(x)=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}.dt=arc\,tg\,x$$

$$arc\,tg\,x=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n.t^{2n}.dt=\int_0^x\left(1-t^2+t^4-t^6....+(-1)^n.t^{2n}+...\right)dt$$

$$=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}-....+(-1)^n.\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+...=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n.\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Ya vimos que $f(x)$ converge $\forall x \in (-1;1)$ (ver pág. 490). Por lo tanto el radio de convergencia de $g(x)$ es $R=1$.

Si analizamos la convergencia en los extremos vemos que en $x_0 = -1$ y en $x_0 = 1$, aplicando el criterio de Leibniz, es convergente por lo tanto el intervalo de convergencia es $[-1;1]$.

OTRAS APLICACIONES

Acotación de integrales definidas

También podemos utilizar el desarrollo en serie para aproximar integrales definidas.

a) $\int_0^x e^{-t^2}.dt$

Esta integral no se puede resolver por los métodos clásicos. Pero ya vimos el desarrollo en serie de e^{-x^2}.

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}$$

Por lo tanto $\int_0^x e^{-t^2}.dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{2!.5} - \frac{x^7}{3!.7} + \ldots + (-1)^n.\frac{x^{2n+1}}{n!.(2n+1)} + \ldots$

Como aplicación podemos calcular

$$\int_0^{0,5} e^{-t^2}.dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{24} + \frac{1}{320} - \frac{1}{5376} + \ldots \cong 0{,}5 - 0{,}0417 + 0{,}0031 - 0{,}0002 + \ldots$$

Tenemos una serie alternada que por el criterio de Leibniz es convergente, al "cortarla", por ejemplo en el 3º término, podemos asegurar que $S = 0{,}4614$ con un error menor que $a_4 = 0{,}0002$.

$$0{,}4612 < S < 0{,}4616$$

b) $\int_0^x \frac{sen\,t}{t}.dt$

$$\frac{sen\,x}{x} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}}{x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots}{x} + \ldots = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{.(2n+1)!} \Rightarrow \int_0^x \frac{sen\,t}{t} dt = x - \frac{x^3}{3.3!} + \frac{x^5}{5.5!} - \frac{x^7}{7.7!} + \ldots$$

Ahora podemos calcular

$$\int_0^{0,1} \frac{sen\,t}{t}.dt = \frac{1}{10} - \left(\frac{1}{10}\right)^3 \frac{1}{3.3!} + \left(\frac{1}{10}\right)^5 \frac{1}{5.5!} - \left(\frac{1}{10}\right)^7 \frac{1}{7.7!} + \ldots$$

Tenemos una serie alternada que por el criterio de Leibniz es convergente, al "truncarla", por ejemplo en el 2º término, podemos asegurar que $S = 0{,}0999$ con un error menor que $a_3 = 1{,}6.10^{-8}$.

Cálculo de límites

Los desarrollos en serie permiten resolver algunos límites. Veamos los siguientes ejemplos:

a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n.x^n}{n!}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots - \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n.x^n}{n!} + \ldots\right)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x + 2\frac{x^3}{3!} + 2\frac{x^5}{5!} + \ldots}{x} = \lim_{x\to 0} \left(2 + 2\frac{x^2}{3!} + 2\frac{x^4}{5!} + \ldots\right) = 2$$

Podemos verificar aplicando la regla de L'Hopital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{1}=\frac{2}{1}=2$$

b) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+....\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+....}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2!}-\frac{x^3}{4!}+\frac{x^5}{6!}+....=0$$

Este límite ya fue calculado en el capítulo de límites por otro procedimiento.

La Ecuación Fundamental de la Matemática: $e^{\pi i}+1=0$

Si en el desarrollo de e^x hacemos $x=\pi i$, queda:

$$e^{\pi i}=1+\pi i+\frac{(\pi i)^2}{2}+\frac{(\pi i)^3}{3!}+\frac{(\pi i)^4}{4!}+\frac{(\pi i)^5}{5!}+\frac{(\pi i)^6}{6!}...=$$

$$=1+\pi i-\frac{\pi^2}{2}-\frac{\pi^3 i}{3!}+\frac{\pi^4}{4!}+\frac{\pi^5 i}{5!}-\frac{\pi^6}{6!}...=$$

$$=\left(1-\frac{\pi^2}{2}+\frac{\pi^4}{4!}-\frac{\pi^6}{6!}+...\right)+i.\left(\pi-\frac{\pi^3}{3!}+\frac{\pi^5}{5!}+...\right)=\cos\pi+i.\operatorname{sen}\pi$$

Por lo tanto $e^{\pi i}+1=\cos\pi+i.\operatorname{sen}\pi+1=-1+0-1=0$. Esta ecuación es conocida como la ecuación fundamental de la matemática porque reúne a los números notables: e, π, y la unidad imaginaria i.

El Problema de Basilea

Ya hemos visto que, por lo general, no es fácil determinar a qué número converge una serie, aún sabiendo que ésta converge.
Este caso en particular, que se lo conoce como el problema de Basilea, fue estudiado por Leonard Euler y calcula la suma exacta de un caso particular de un serie p.

Vamos a demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+...=\frac{\pi^2}{6}$

Partimos del desarrollo en serie de la función $\operatorname{sen} x$.

$$\operatorname{sen} x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...$$

Pero los ceros de $\operatorname{sen} x$ son los múltiplos enteros de π, $(0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, ...)$. Expresamos la serie infinita como producto de factores lineales dados por los ceros, de la misma forma que hacemos con los polinomios finitos:

$$\operatorname{sen} x=Cx(x-\pi)(x+\pi)(x-2\pi)(x+2\pi)(x-3\pi)(x+3\pi)....$$

Multiplicamos entre sí los dos factores asociados a π, los dos asociados a 2π, a 3π etc.:

$$\operatorname{sen} x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...=Cx(x^2-\pi^2)(x^2-4\pi^2)(x^2-9\pi^2)....$$

Dividimos y multiplicamos cada factor en el que interviene π^2 por $-\pi^2$, $-4\pi^2$, $-9\pi^2$, etc.

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...=Cx\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)(-\pi^2)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)(-4\pi^2)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)(-9\pi^2)...$$

Si multiplicamos todas las constantes y la denominamos A queda:

$$sen\,x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... = Ax\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right).\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right).\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)...$$

Dividiendo por x, tenemos

$$\frac{sen\,x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + ... = A\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right).\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right).\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)...$$

Como $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sen\,x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} A\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right).\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right).\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)... = 1$.

De esta igualdad surge que $A = 1$.

Llegamos así a una igualdad entre polinomios

$$1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + ... = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right).\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right).\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)...$$

Los respectivos coeficientes de x^2 deben ser iguales.

$$-\frac{1}{3!} = -\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{4\pi^2} - \frac{1}{9\pi^2} - ....$$

Multiplicando por $(-\pi^2)$ surge que: $\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + ...$

Por lo tanto $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + ... = \frac{\pi^2}{6}$.

Ejercicios Resueltos

1) Hallar el intervalo de convergencia de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n+1}}{n^n}$

Aplicando D'Alambert

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{(x-2)^{2n+3}}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{(x-2)^{2n+1}}{n^n}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(x-2)^{2n+1}.(x-2)^2.n^n}{(n+1)^{n+1}.(x-2)^{2n+1}}\right| = |x-2|^2 \lim_{n\to+\infty}\left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^n.\frac{1}{n+1}\right] =$$

$$|x-2|^2 \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}.\frac{1}{n+1}\right] = |x-2|^2.e^{-1}.0 = 0 < 1$$

Por lo tanto la serie converge $\forall x \in \Re$, $I = (-\infty\,;+\infty)$.

2) Dada $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} = x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + ... + \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + ...$

a) determinar el intervalo de convergencia en el cual la serie converge a $f(x)$.

b) analizar la concavidad de f en el origen.

c) Hallar $f'''(0)$

a)

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{x^n}{n^2}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^{n+1}.n^2}{(n+1)^2.x^n}\right| = |x| \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2} = |x|.1 < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$$

$\underline{x = -1}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, aplicando el criterio de Leibniz vemos que converge.

$\underline{x = 1}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, es una serie p con $p = 2 > 1$, por lo tanto converge.

Vemos que en $x = -1$ la serie es absolutamente convergente.

El intervalo de convergencia de $f(x)$ es $I = [-1;1]$.

b) Comparando la serie con la serie de Mac Laurin, tenemos que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^{n+1}$$

$\frac{f''(0)}{2!} = \frac{1}{4} \Rightarrow f''(0) = 1 > 0$, entonces f es cóncava en el origen.

c) $\frac{f'''(0)}{3!} = \frac{1}{9} \Rightarrow f'''(0) = \frac{2}{3}$

3) A partir del desarrollo en serie del punto 2) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$, podemos obtener, derivando la serie, el desarrollo en serie de

$$f'(x) = g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n+1} + \ldots$$

Ya vimos que el intervalo de convergencia de $f(x)$ es $I = [-1;1]$.

Veamos ahora el intervalo de convergencia de $g(x)$. Sabemos que el radio de convergencia de $g(x)$ es el mismo que el radio de convergencia de $f(x)$, es decir $R = 1$. Tenemos que ver que pasa en los extremos del intervalo.

$\underline{x = -1}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$, aplicando el criterio de Leibniz vemos que converge.

$\underline{x = 1}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$, utilizando el criterio de la integral de Cauchy vemos que diverge.

Por lo tanto en $x = -1$ la serie es condicionalmente convergente.

El intervalo de convergencia de $g(x)$ es $I = [-1;1)$.

Ejercicios Propuestos

Series Numéricas

A) *Escribir el término enésimo de cada una de las series*

1. $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.2^2} + \frac{1}{3.2^3} + \ldots +$ 2. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots +$

3. $1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^3 + \left(\frac{4}{7}\right)^4 + \ldots +$ 4. $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \ldots +$

5. $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots -$ 6. $1 + \frac{1.3}{1.4} + \frac{1.3.5}{1.4.7} + \frac{1.3.5.7}{1.4.7.10} + \ldots +$

7. $\frac{\sqrt{2}}{1} - \frac{\sqrt{3}}{1} + 1 - \frac{\sqrt{5}}{6} + \ldots -$ 8. $2 + 3 + 7 + 25 + 121 + \ldots +$

B) *Dadas las siguientes expresiones de las sumas parciales S_n, obtener la suma de las series*

a) $S_n = \frac{10n+1}{3n+3} - \frac{1}{3}$ b) $S_n = \frac{n^2+3}{5n^2+4} + \frac{4}{5}$ c) $S_n = \left(\frac{n^2+4}{n^2+3}\right)^n$

C) *Obtener la suma de las siguientes series*

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} ln \frac{2n-1}{2n+1}$

D) *Investigar la convergencia de las siguientes series utilizando los criterios de comparación o la condición necesaria*

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n$ 2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3^n+1}$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n.2^n}$

E) *Estudiar la convergencia de las siguientes series aplicando el criterio de D'Alambert*

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{2^n}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2n-1}$ 3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{(n+1)!}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$ 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n.4^{n+1}}$ 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$

F) *Analizar la convergencia aplicando el criterio de Raabe*

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n.(n+1)}$ 2. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n.(n-1)}{(n-1)^2+1}$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1).(2n+1)}$ 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1.4.7...(3n-2)}{3.6.9...3n}\right)^2$ 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{2^n+1}$

G) *Analizar la convergencia de las siguientes series aplicando el criterio de la raiz*

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{n+1}\right)^n$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{2n}}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{sen\, a}{n}\right)^{3n}$ 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n^n}$ 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n+1}{3n+2}\right)^{n^2}$

H) *Analizar la convergencia aplicando el criterio que corresponda*

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{2n^2+1}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ 3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+3)!}{3!.n!.3^n}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2n}$ 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!.(n+1)!}$ 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+1).n}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n.n^6}{n^n}$ 8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2).(n+1)}$ 9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ 11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4}$ 12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ln\, n}{n^3}$

I) *Analizar la convergencia de las series alternadas*

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}.\frac{1}{n}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}.\frac{n+1}{n}$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n.\frac{n+2}{n.(n+1)}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}.\frac{ln\, n}{n}$ 5. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}.\frac{n}{6n-5}$ 6. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n.\frac{\sqrt{n}}{2\,n+1}$

J) *Investigar la convergencia absoluta o condicional*

1. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+...-$ 2. $1-\frac{2}{3}+\frac{3}{3^2}-\frac{4}{3^3}+...-$

3. $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+...-$ 4. $\frac{3}{1.2}-\frac{5}{2.3}+\frac{7}{3.4}-...+$

5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{cos(n\pi)}{n+2}$ 6. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+2}$

K) Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$ a) analizar si es convergente, b) de serlo, determinar si la convergencia es absoluta o condicional, hallar el valor aproximado de su suma si se considera la suma parcial de orden 4 y acotar el error que se comete.

L) *Dada la sucesión, hallar el límite*

$(a_n) = (1{,}5;\ 1{,}55;\ 1{,}555;....;1{,}55555;...)$

M) Sea la sucesión de sumas parciales (S_n) de la serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ / $\forall n\in \aleph$ y $n \geq n_0$: $\frac{2+2n^5}{3+8n+4n^5} \leq S_n \leq \frac{4-n^2}{3+n+2n^2}+1$

a) Analizar la convergencia de la serie

b) Calcular $\lim_{n\to+\infty} (1+3a_n)^{1/2a_n}$

N) Demostrar que: a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+9n+20}=\frac{1}{5}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2+8n+3}=\frac{1}{3}$

O) Demostrar que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie convergente de términos positivos, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[5]{a_n}}{n^k}$ es absolutamente convergente $\forall k\in \Re$.

P) a) Analizar la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$

b) Utilizar el resultado para calcular $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$

SERIES DE POTENCIAS

A) Hallar el intervalo de convergencia de las series de potencias

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}.x^n}{n}$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n.x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n.3^n}$ 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2^n)^2}$ 7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$ 8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n.x^n}{n!}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n.x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$ 10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}.(x+3)^n$ 11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n.2^n}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}.\frac{(2x-5)^n}{n.3^n}$ 13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{2n+1}}{(n+1)^n}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{n^4}{n!}.(4x+6)^n$ 15. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n.\frac{4^{n+1}.(x+1)^n}{n+3}$

B) Desarrollar las siguientes funciones en serie de Mac Laurin. Calcular el intervalo de convergencia

a) $f(x)=e^x$ b) $f(x)=e^{-x}$ c) $f(x)=sen\,x$ d) $f(x)=cos\,x$

e) $f(x)=Ch\,x$ f) $f(x)=Sh\,x$ g) $f(x)=\frac{1}{1-x}$ h) $f(x)=ln\,(1+x)$

i) $f(x)=(1+x)^{\alpha}$

C) Demostrar que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\,4^n}{(2n)!}$ converge a cos 2. Verificar que ese valor está dentro del intervalo que se obtiene truncando la serie en a_4.

D) Sabiendo que $f(x)=\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, encontrar el desarrollo en serie de Mac Laurin de $g(x)=\frac{1}{4+4x^2}$. ¿es verdad que la serie numérica correspondiente a $x = 3$ converge a g(3)?

E) Utilizando series calcular:

a) $\lim_{x\to0} \frac{cos\,x-1+\frac{1}{2}x^2}{x^4}$ b) $\lim_{x\to0} \frac{sen\,x-x}{x^3}$ c) $\lim_{x\to0} \frac{e^{2x}-1}{x}$

Verificar aplicando la regla de L'Hopital.

F) Calcular $\int \frac{e^x}{x}.dx$ utilizando series.

G) Si la serie cuya suma n-ésima parcial es $S_n=\left(\frac{n^2+n-6}{n^2-2n+1}\right)^{\frac{n^2+5}{n+2}}$, analizar su convergencia.

H) Calcular $\int_a^{+\infty} \frac{-dx}{x^2+7x+12}$, donde a es el extremo inferior del intervalo de convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+3}.(x-3)^n$

I) Acotar $\int_0^1 e^{-x^2}.dx$ con 1 decimal exacto.

J) Analizar la convergencia absoluta o condicional en los extremos del intervalo de convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n.3^n}.(x-3)^n$.

RESPUESTAS

Series numéricas

A) 1. $\frac{1}{n.2^n}$ 2. $\frac{1}{2n-1}$ 3. $\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n$ 4. $\frac{1}{n.(n+1)}$

5. $(-1)^{n+1}$ 6. $\frac{1.3.5.(2n-1)}{1.4.7.(3n-2)}$ 7. $(-1)^{n+1}.\frac{\sqrt{n+1}}{(n-1)!}$ 8. $n!+1$

B) a) 3, b) 1, c) 1 C) a) 1, b) $-\frac{1}{4}$, c) $-\infty$

D) 1. div. 2. conv. 3. conv.

E) 1. conv. 2. div. 3. conv. 4. conv. 5. conv. 6. no se sabe

F) 1. conv. 2. div. 3. conv. 4. conv. 5. div. 6. div.

G) 1. conv. 2. div. 3. conv. 4. conv. 5. conv. 6. div.

H) 1. div. 2. conv. 3. conv. 4. div. 5. conv. 6. div. 7. conv. 8. conv. 9. conv. 10. div. 11. conv. 12. conv.

I) 1. conv. 2. no conv. 3. conv. 4. conv. 5. no conv. 6. conv.

J) 1. abs. 2. abs. 3. cond. 4. cond. 5. cond. 6. cond.

K) Converge condicionalmente con $S_4 = \frac{52}{315}$, $0{,}074 \le S \le 0{,}256$.

El error es $\le \frac{1}{11}$.

L) $l = \frac{14}{9}$, M) a) La serie converge a $1/2$ b) $e^{3/2}$ P) a) converge, b) $l = 0$

Series de potencias

A) 1. $(-\infty;+\infty)$ 2. $(-1;1]$ 3. $(-\infty;+\infty)$ 4. $[-1;1)$

5. $[-1;5)$ 6. $(-4;4)$ 7. $(-\infty;+\infty)$ 8. $(-\infty;+\infty)$

9. $(-\infty;+\infty)$ 10. $(-5;-1)$ 11. $[-2;2)$ 12. $(1;4]$

13. $(-\infty;+\infty)$ 14. $(-\infty;+\infty)$ 15. $(-5/4;-3/4]$

B) a) $1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots, (-\infty;+\infty)$

b) $1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots\ (-\infty;+\infty)$

c) $\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots(-\infty;+\infty)$ d) $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots\ (-\infty;+\infty)$

e) $1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots\ (-\infty;+\infty)$ f) $\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots(-\infty;+\infty)$

g) $1+x+x^2+x^3+\ldots\ |x|<1$ h) $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots\ (-1;1]$

i) $1+\frac{\alpha x}{1!}+\frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!}+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^n}{n!}+\ldots\ |x|<1$

D) $g(x)=\sum\frac{(-1)^n x^{2n}}{4}$, la serie no converge a g (3) porque $x=3$ no pertenece al intervalo de convergencia.

E) a) $l=\frac{1}{24}$, b) $l=-\frac{1}{6}$ c) $l=2$ F) $ln|x|+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n.n!}+C$

G) converge a e^3 H) $ln\frac{11}{13}$ I) 0,7 J) en $x=6$ conv. condic.

BIBLIOGRAFÍA

- Apostol, T. Calculus, Vol. I. Buenos Aires, Reverté. 1982.
- Allen, R. G. D., "Análisis Matemático para Economistas", editorial Aguilar, Madrid, 1978.
- Balduccetti, R. y Morelli, G., "Gli Integrali", Edizioni Universitaire Romane, Roma, 1993.
- Balduccetti, R. y Morelli, G., "Limiti di Funzioni", Edizioni Universitaire Romane, Roma, 1993.
- Balduccetti, R. y Morelli, G., "Le Derivate", Edizioni Universitaire Romane, Roma, 1993.
- Balduccetti, R. y Morelli, G., "Studio delle Funzioni", Edizioni Universitaire Romane, Roma, 1993.
- Bellecave, Y. y otros, "Themes Mathematiques", Editorial Fernand Nathan, Paris, 1982.
- Casparri, María Teresa y otros, "Análisis Matemático II", editorial El Coloquio, Buenos Aires, 1973.
- Chiang, Alpha, "Fundamental Methods of Mathematical Economics." McGraw-Hill, Nueva York, 1974.
- De Burgos, J. Cálculo Infinitesimal de una variable, Madrid. McGraw-Hill, 1996.
- Di Caro, Héctor, "Análisis Matemático II con aplicaciones a la Economía". Ed. Club de Estudio, Buenos Aires, 1979.
- Ferguson, C. E. y Gould, J. P, "Teoría Microeconómica", Fondo de cultura económica de México, Buenos Aires, 1983.
- Henderson, J. M. y Quandt, R.E., "Teoría Microeconómica", Editorial Ariel, Barcelona, 1985.
- Leithold, Louis, "El Cálculo con geometría analítica", editorial Harla, México DF, 1992.
- Rabuffetti, Hebe T., "Introducción al Análisis Matemático", editorial El Ateneo, Buenos Aires, 1983.
- Salvatore, Dominick, "Microeconomia. 310 problemi risolti", editorial Etas, Roma, 1992.
- Stewart, James, "Calculus", editorial Wadsworth, PWS Publishers, Belmont USA, 1983.
- Vinci, Salvatore, "Introduzione alla Microeconomia", Liguori Editori, Napoli, 1993.
- Weber, Jean, "Matemáticas para administración y economía", editorial Harla, México DF, 1993.

ÍNDICE

DIFERENCIAL 217

ANALISIS DE FUNCIONES 231

TEOREMAS DE FUNCIONES DERIVABLES ... 263

Alejandro E. García Venturini

Lic. en Investigación Operativa y Profesor de Matemática y Cosmografía.
Profesor de Posgrado, Profesor Titular Interino de Análisis Matemático II y Profesor Regular Adjunto del área Matemática en la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires.
Profesor Regular Adjunto de Análisis Matemático I en la Universidad Tecnológica Nacional - FRBA.
Profesor Titular de Matemática del Colegio Nacional de Buenos Aires.
Profesor Regular Adjunto en la Carrera de Edición de la Facultad de Filosofía y Letras de la UBA.
Profesor de Análisis Matemático I y II en el Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González"

Mónica Scardigli

Licenciada en Ciencias Aplicadas de la Universidad Tecnológica Nacional - FRBA.
Profesora de Matemática y Matemática Aplicada del Instituto Nacional Superior del Profesorado Técnico.
Profesora Regular Asociada de Análisis Matemático I, Álgebra y Geometría Analítica en la Universidad Tecnológica Nacional - FRBA.

Cód. 244



